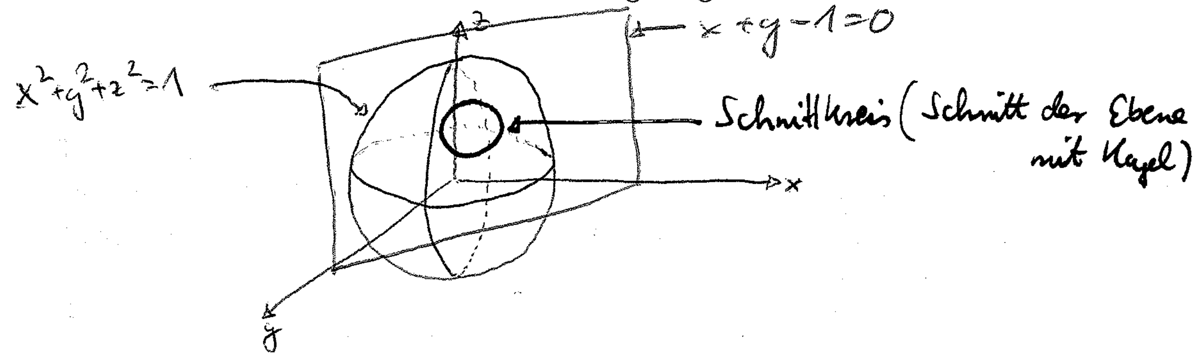
Folie zur Vorlesung "Mathematik B"
19. Mai 2010

Lagrange-Methode mit mehreren Nebenbedingungen:

Aufgabe: Maximiere/minimiere $f(x,y,z) = xyz$ unter den beiden Nebenbedingungen $g_1(x,y,z) = x+y-1 = 0$ (Ebene im $\mathbb{R}^3$) und $g_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$ (Kugel im $\mathbb{R}^3$ mit Radius 1 um $\vec{0}$).

Skizze: Es sind die Extrema von $f(x,y,z)$ zu finden auf dem Schnittkreis, der sich beim Schnitt der Ebene und der Kugel ergibt:



Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= f(x,y,z) + \lambda_1 g_1(x,y,z) + \lambda_2 g_2(x,y,z) \\ &= xyz + \lambda_1(x+y-1) + \lambda_2(x^2+y^2+z^2-1). \end{aligned}$$

$$\nabla L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \begin{pmatrix} yz+\lambda_1+2x\lambda_2 \\ xz+\lambda_1+2y\lambda_2 \\ xy+2z\lambda_2 \\ x+y-1 \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Subtraktion der zweiten Koordinate von der ersten Koordinate des Gradienten ergibt:

$$z(y-x) + 2\lambda_2(x-y) = 0 \implies \lambda_2 = \frac{z(x-y)}{2(x-y)} = \frac{z}{2}, \quad \text{falls } x \neq y.$$

Aus der letzten Zeile der Gradientengleichung folgt: $z^2 = 1 - x^2 - y^2$. Aus der vierten Gleichung folgt $y = 1-x$. Einsetzen in die dritte Koordinatengleichung des Gradienten ergibt:

$$0 = xy + 2z\frac{z}{2} = xy + 1 - x^2 - y^2 = x(1-x) + 1 - x^2 - (1-x)^2 = 3x(1-x).$$

Daraus folgt $x = 0$ oder $x = 1$. Falls $x = 0$, so gilt $y = 1 - x = 1$ und $z = 1 - x^2 - y^2 = 0$; falls $x = 1$, so gilt $y = 1 - x = 0$ und $z = 1 - x^2 - y^2 = 0$. D.h. $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ sind stationäre Punkte!

Wir betrachten nun den Fall $x = y$: Aus der vierten Gradientengleichung folgt:

$$0 = x + y - 1 = x + x - 1 \Longrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt $z^2 = 1 - x^2 - y^2 = 1 - 2x^2 = \frac{1}{2}$, d.h. $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Also sind auch $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ stationäre Punkte!

Welche Typen von stationären Punkten liegen vor?

Es gilt $f(1,0,0) = f(0,1,0) = 0$ und $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) > 0$ sowie $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) < 0$. Also muß bei $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ein Maximum vorliegen und bei $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ein Minimum vorliegen. An den Punkten $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ können nur Sattelpunkte vorliegen, da ansonsten auf dem Schnittkreis "dazwischen" noch weitere Maxima oder Minima existieren müssten (es gibt aber keine weiteren stationären Punkte, also keine weiteren Maxima/Minima).

Skizze des Schnittkreises: