Folien zur Vorlesung “Mathematik B”
16. Juni 2010

Zu linearen DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Es sei eine homogene DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffiezienten gegeben:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

wobei $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Sei $P(\lambda)$ das zugehörige *charakteristische Polynom*, d.h.

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0.$$

Sei nun $\lambda_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine echt-komplexe Nullstelle von $P(\lambda)$ mit Vielfachheit $\mu(\lambda_1) = k > 0$. Es sind also die Funktionen

$$\hat{y}_1(x) = e^{\lambda_1 x},\ \hat{y}_2(x) = x\, e^{\lambda_1 x}, \ldots, \hat{y}_k(x) = x^{k-1}\, e^{\lambda_1 x}$$

linear unabhängige *komplex-wertige* Lösungen der DGL.

Frage: Wie bekommt man daraus *reell-wertige* Lösungen?

Überlegung: Sei $y = y_R + iy_I$ eine komplex-wertige Lösung mit Realteil y_R und Imaginärteil y_I, d.h. y_R und y_I sind reellwertig. Es gilt:

$$y^{(k)} = y_R^{(k)} + iy_I^{(k)}.$$

Wir setzen y in die DGL ein:

$$\big(y_R^{(n)} + iy_I^{(n)}\big) + a_{n-1}\big(y_R^{(n-1)} + iy_I^{(n-1)}\big) + \ldots + a_1\big(y_R' + iy_I'\big) + a_0(y_R + iy_I) = 0$$

Umstellen und Trennen nach Real- und Imaginärteil ergibt:

$$\underbrace{\Big[y_R^{(n)} + a_{n-1}y_R^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_R' + a_0 y_R\Big]}_{=0} + i\,\underbrace{\Big[y_I^{(n)} + a_{n-1}y_I^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_I' + a_0 y_I\Big]}_{=0} = 0.$$

D.h. y_R und y_I sind auch – nun reellwertige – Lösungen der DGL.

Es gilt:

$$e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\big).$$

Die Realteile der Lösungen $\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_k$ sind somit:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ y_2 = xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, y_k = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x).$$

Die Imaginärteile der Lösungen $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_k$ sind:

$$y_{k+1} = e^{\alpha x} \sin(\beta x),\ y_{k+2} = x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, y_{2k} = x^{k-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Somit wurden zur Nullstelle λ_1 insgesamt $2k$ linear unabhängige Lösungen $y_1, \dots, y_{2k}$ der DGL gefunden.

Bemerkung: Wenn $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle von $P(\lambda)$ ist mit $\mu(\lambda_1) = k > 0$, dann ist auch die komplex-konjugierte Zahl $\bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ eine Nullstelle von $P(\lambda)$ mit $\mu(\bar{\lambda}_1) = k$. Da aber

$$e^{\bar{\lambda}_1 x} = e^{\alpha x} \big(\cos(\beta x) - i \sin(\beta x) \big),$$

sind die Realteile der Lösungen zu $\bar{\lambda}_1$ identisch mit den Realteilen der Lösungen zu λ_1; die Imaginärteile der Lösungen zu $\bar{\lambda}_1$ sind bis auf negatives Vorzeichen auch identisch mit den Imaginärteilen der Lösungen zu λ_1.
Mit anderen Worten: Man muss nur die $2k$ Lösungen zu λ_1 bestimmen; die Nullstelle $\bar{\lambda}_1$ muss nicht mehr weiter betrachtet werden!

Beispiele zu linearen DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

1. Aufgabe: Löse das folgende Anfangswertproblem:

$$y'' - 3y' + 2y = x, \quad \text{mit } y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Lösung: Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist somit gegeben durch:

$$y_{hom}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Die Störfunktion hat die Form $b(x) = x = xe^{0 \cdot x}$. Zur Bestimmung einer speziellen Lösung verwenden wir den Ansatz

$$y_{sp}(x) = x^{\mu(0)} e^{0 \cdot x}(A + Bx) = A + Bx.$$

Differenzieren von y_{sp} ergibt $y'_{sp} = B$ und $y''_{sp} = 0$. Einsetzen in die DGL ergibt somit:

$$0 - 3B + 2(A + Bx) = x.$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$x^0: \ -3B + 2A = 0, \quad x^1: \ 2B = 1$$

Daraus ergibt sich $B = 1/2$ und $A = 3/4$. Somit ist die allgemeine Lösung der DGL gegeben durch

$$y_{all}(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x.$$

Zum Lösen des Anfangswertproblems leiten wir $y_{all}(x)$ einmal ab:

$$y'_{all}(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}.$$

Wir setzen in $y_{all}(x)$ und $y'_{all}(x)$ den Wert $x = 0$ ein und kommen auf folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 1 &= y_{all}(0) = C_1 + C_2 + \frac{3}{4} \\ 2 &= y'_{all}(0) = C_1 + 2C_2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Werte $C_1 = -1$ und $C_2 = 5/4$, d.h. die Lösung ist

$$y(x) = -e^x + \frac{5}{4}e^{2x} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x.$$

2. Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 e^x.$$

Lösung: Wie im ersten Beispiel ist die vollständige Lösung der zugehörigen homogenen DGL gegeben durch:

$$y_{hom}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung verwenden wir den Ansatz

$$y_{sp}(x) = x^{\mu(1)} e^x (A + Bx + Cx^2) = e^x (Ax + Bx^2 + Cx^3).$$

Differenzieren von y_{sp} ergibt:

$$\begin{aligned} y'_{sp}(x) &= e^x(Ax + Bx^2 + Cx^3) + e^x(A + 2Bx + 3Cx^2), \\ y''_{sp}(x) &= e^x(Ax + Bx^2 + Cx^3) + 2e^x(A + 2Bx + 3Cx^2) + e^x(2B + 6Cx). \end{aligned}$$

Einsetzen von $y_{sp}(x)$ in die DGL ergibt somit:

$$\begin{aligned} e^x(Ax + Bx^2 + Cx^3) + 2e^x(A + 2Bx + 3Cx^2) + e^x(2B + 6Cx) \\ -3\big(e^x(Ax + Bx^2 + Cx^3) + e^x(A + 2Bx + 3Cx^2)\big) \\ +2e^x(Ax + Bx^2 + Cx^3) &= x^2 e^x. \end{aligned}$$

Es wird auf beiden Seiten der Gleichung durch e^x dividiert und dann ein Koeffizientenvergleich gemacht:

$$\begin{aligned} x^3: &\quad 0 = C - 3C + 2C = 0 \\ x^2: &\quad 1 = B + 6C - 3B - 9C + 2B = -3C \\ x^1: &\quad 0 = A + 4B + 6C - 3A - 6B + 2A = 6C - 2B \\ x^0: &\quad 0 = 2A + 2B - 3A = 2B - A \end{aligned}$$

Lösung dieses Gleichungssystems ist $A = -2$, $B = -1$, $C = -1/3$. Somit ist die allgemeine Lösung der DGL gegeben durch

$$y_{all}(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^x\big(-2x - x^2 - \frac{1}{3}x^3\big).$$

3. Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' - 4y' + 13y = e^{-x}.$$

Lösung: Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = \big(\lambda - (2+3i)\big)\big(\lambda - (2-3i)\big).$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist somit gegeben durch:

$$y_{hom}(x) = C_1 e^{2x}\cos(3x) + C_2 e^{2x}\sin(3x).$$

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung verwenden wir den Ansatz

$$y_{sp}(x) = x^{\mu(-1)} e^{-x} A = Ae^{-x}.$$

Differenzieren von y_{sp} ergibt $y'_{sp} = -Ae^{-x}$ und $y''_{sp} = Ae^{-x}$. Einsetzen von $y_{sp}(x)$ in die DGL ergibt somit:

$$Ae^{-x} - 4(-Ae^{-x}) + 13Ae^{-x} = e^{-x}.$$

Dividieren durch e^{-x} ergibt $A = 1/18$. Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y_{all}(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x) = C_1 e^{2x}\cos(3x) + C_2 e^{2x}\sin(3x) + \frac{1}{18}e^{-x}.$$

4. Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' - 4y' + 13y = \cos(3x)e^{2x}.$$

Lösung: Wie im vorhergehenden Beispiel ist die Lösung der zugehörigen homogenen DGL gegeben durch:

$$y_{hom}(x) = C_1 e^{2x}\cos(3x) + C_2 e^{2x}\sin(3x).$$

Die Störfunktion hat hier die Form

$$b(x) = \big(1 \cdot \cos(3x) + 0 \cdot \sin(3x)\big)e^{2x}.$$

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung verwenden wir den Ansatz

$$\begin{aligned} y_{sp}(x) &= x^{\mu(2+3i)} e^{2x}\big(A\cos(3x) + B\sin(3x)\big) \\ &= e^{2x}\big(Ax\cos(3x) + Bx\sin(3x)\big). \end{aligned}$$

Differenzieren von y_{sp} ergibt:

$$\begin{aligned} y'_{sp}(x) &= e^{2x}\big(2Ax\cos(3x) + 2Bx\sin(3x) + A\cos(3x) \\ &\quad -3Ax\sin(3x) + B\sin(3x) + 3Bx\cos(3x)\big), \\ y''_{sp}(x) &= -e^{2x}\big(5Ax\cos(3x) + 5Bx\sin(3x) - 4A\cos(3x) + 12Ax\sin(3x) \\ &\quad -4B\sin(3x) - 12Bx\cos(3x) + 6A\sin(3x) - 6B\cos(3x)\big) \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$-6e^{2x}\big(A\sin(3x) - B\cos(3x)\big) = \cos(3x)e^{2x},$$

bzw. $-6A\sin(3x) + 6B\cos(3x) = \cos(3x)$. Koeffizientenvergleich liefert also $A = 0$ und $B = 1/6$. Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y_{all}(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x) = C_1 e^{2x}\cos(3x) + C_2 e^{2x}\sin(3x) + \frac{1}{6}e^{2x}x\sin(3x).$$

5. Aufgabe: Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' - 3y' + 2y = x + e^{2x}.$$

Lösung: Die Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist gegeben durch (siehe oben):

$$y_{hom}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Die Störfunktion hat die Form $b(x) = xe^{0\cdot x} + e^{2x}$. Eine spezielle Lösung zur DGL $y'' - 3y' + 2y = x$ ist gegeben durch (siehe oben)

$$y_{sp,1}(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x$$

Wir suchen nun noch eine spezielle Lösung zur DGL $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$. Dazu verwenden wir den Ansatz

$$y_{sp,2}(x) = x^{\mu(2)} e^{2x} A = Axe^{2x}.$$

Differenzieren von $y_{sp,2}$ ergibt:

$$y'_{sp,2} = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} \quad \text{und} \quad y''_{sp} = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}.$$

Einsetzen in die DGL ergibt somit:

$$e^{2x}(4A + 4Ax) - 3e^{2x}(A + 2Ax) + 2Axe^{2x} = e^{2x},$$

bzw. $A - 0 \cdot x = 1$, also $A = 1$. Somit ist eine spezielle Lösung von $y'' - 3y' + 2y = x + e^{2x}$ gegeben durch

$$y_{sp}(x) = y_{sp,1}(x) + y_{sp,2}(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x + xe^{2x}.$$

Somit ist die allgemeine Lösung der DGL gegeben durch

$$y_{all}(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x + xe^{2x}.$$

Reduktion der Ordnung:

Wir betrachten eine DGL der Form:

$$(*) \quad y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

Ziel ist es, diese DGL in eine lineare DGL erster Ordnung umzuformen. Dazu nehmen wir an, daß wir eine Lösung $y_1(x)$ der zugehörigen homogenen DGL $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ "erraten" haben. Wir setzen

$$y(x) = y_1(x) \cdot u(x).$$

Differenzieren ergibt:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= y_1'(x)u(x) + y_1(x)u'(x), \\
y''(x) &= y_1''(x)u(x) + y_1'(x)u'(x) + y_1'(x)u'(x) + y_1(x)u''(x) \\
&= y_1''(x)u(x) + 2y_1'(x)u'(x) + y_1(x)u''(x).
\end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL $(*)$ ergibt:

$$y_1''(x)u(x) + 2y_1'(x)u'(x) + y_1(x)u''(x) + a_1(x)\big(y_1'(x)u(x) + y_1(x)u'(x)\big) + a_0(x)y_1(x)u(x) = b(x),$$

bzw. umgeformt:

$$u(x)\underbrace{\big(y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x)\big)}_{=0} + 2y_1'(x)u'(x) + y_1(x)u''(x) + a_1(x)y_1(x)u'(x) = b(x).$$

Wir ersetzen nun $z(x) = u'(x)$ und erhalten somit eine neue DGL erster Ordnung:

$$z\big(2y_1'(x) + a_1(x)y_1(x)\big) + z'y_1(x) = b(x).$$

Diese kann man wie gewohnt lösen und durch Integration von $z(x)$ bestimmt man $u(x)$, und daraus $y(x) = y_1(x)u(x)$.

Beispiel: Man bestimme die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x^2 + 1.$$

Lösung: Wir "erraten" eine Lösung $y_1(x) = x$ der homogenen DGL $y'' + y'/x - y/x^2 = 0$. Wir setzen $y(x) = x \cdot u(x)$ und $z(x) = u'(x)$ und erhalten die neue DGL:

$$z\big(2 \cdot 1 + \frac{1}{x} \cdot x\big) + z' \cdot x = x^2 + 1,$$

bzw. $z' = -3z/x + (x^2 + 1)/x$. Es ist

$$z_{hom}(x) = Ce^{\int -3/x\,dx} = \frac{C}{x^3}.$$

Die spezielle Lösung ergibt sich als

$$z_{sp} = \int \frac{x^2+1}{x} \cdot x^3 \, dx = \int x^4 + x^2 \, dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3.$$

Also:

$$z_{all}(x) = z_{hom}(x) + z_{sp} = \frac{C}{x^3} + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3.$$

Daraus ergibt sich:

$$u(x) = \int z(x) \, dx = -\frac{C}{2x^2} + \frac{1}{30}x^6 + \frac{1}{12}x^4.$$

Somit ist die gesuchte allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_1(x)u(x) = \frac{\hat{C}}{x} + \frac{1}{30}x^7 + \frac{1}{12}x^5.$$

Variation der Konstanten:

Wir betrachten eine DGL der Form:

$$(*) \quad y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

wobei die vollständige Lösung der zugehörigen DGL $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y = 0$ gegeben sei durch

$$y_{hom}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

d.h. y_1, y_2 bilden ein Fundamentalsystem. Wir wollen nun eine spezielle Lösung zu $(*)$ bestimmen. Dazu ersetzen wir in y_{hom} die Konstanten C_1 und C_2 durch Funktionen $C_1(x)$ und $C_2(x)$. Wir verwenden den Ansatz

$$y_{sp}(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \text{ mit } C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0.$$

Differentation von $y_{sp}(x)$ ergibt:

$$\begin{aligned} y_{sp}'(x) &= C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x) \\ &= C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x), \\ y_{sp}''(x) &= C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x). \end{aligned}$$

Einsetzen in $(*)$ ergibt:

$$\begin{aligned} &C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) \\ &\quad + a_1(x)\big(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\big) + a_0(x)\big(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\big) = b(x), \end{aligned}$$

bzw. umgeformt

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x)& \\ +C_1(x)\big(\underbrace{y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x)}_{=0}\big)& \\ +C_2(x)\big(\underbrace{y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_0(x)y_2(x)}_{=0}\big)& \quad = \quad b(x). \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß $C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x) = b(x)$ gelten muss. Wir betrachten nun das Gleichungssystem

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \quad C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = b(x).$$

Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$C_1'(x) = \frac{-b(x)y_2(x)}{W(x)} \text{ und } C_2'(x) = \frac{b(x)y_1(x)}{W(x)},$$

wobei $W(x)$ die Wronski-Determinate zum Fundamentalsystem y_1, y_2 ist. Man beachte, daß $W(x) \neq 0$. Durch Integration von $C_1'(x)$ und $C_2'(x)$ finden wir $C_1(x)$ und $C_2(x)$ und somit die spezielle Lösung $y_{sp}(x)$.

Beispiel: Man bestimme die allgemeine Lösung von

$$(*) \quad y'' - 4y = \frac{1}{e^x + 1}$$

Lösung: Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$. Die Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist

$$y_{hom}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung verwenden wir den Ansatz mittels Variation der Konstanten $y_{sp}(x) = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{-2x}$. Es gilt:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4.$$

Somit sind

$$C_1'(x) = \frac{1}{4}\frac{e^{-2x}}{e^x + 1}, \; C_2'(x) = -\frac{1}{4}\frac{e^{2x}}{e^x + 1}.$$

Integration (mittels Substitution und Partialbruchzerlegung) von $C_1(x)$ und $C_2(x)$ ergibt

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{4}\ln(1 + e^x) - \frac{1}{8}e^{-2x} + \frac{x}{4}, \\ C_2(x) &= -\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}\ln(1 + e^x). \end{aligned}$$

Also ist

$$y_{sp}(x) = \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{2x}\ln(1 + e^x) - \frac{1}{8} + \frac{x}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-2x}\ln(1 + e^x).$$

Somit ist die allgemeine Lösung von $(*)$ gegeben durch

$$y_{all}(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x).$$