Mathematik B für Elektrotechniker, SS 2010

1. Lösen Sie näherungsweise mit Hilfe des Fixpunktsatzes die Gleichungen: (je 3 Pkt.)

   (a) $x = 1 + \tanh x$,

   (b) $x = 1 + \frac{1}{2}\cos x$.

   Geben Sie 8 Iterationen an.

2. Man bestimme auf die zweite Nachkommastelle genau alle komplexen Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 + 2x - 1$. (3 Pkt.)

3. Es sei $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + \cos^2 x - \sin^2 x$. Man berechne die Ober- und Untersumme von f

   (a) bezüglich der äquidistanten Zerlegung von $[0, \pi]$ mit 4 Teilintervallen,

   (b) bezüglich der Zerlegung $Z = \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}$.

   (je 2 Pkt.)

4. Es sei $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x \cos x$. Man berechne die Ober- und Untersumme von f

   (a) bezüglich der äquidistanten Zerlegung von $[0, \pi]$ mit 4 Teilintervallen,

   (b) bezüglich der Zerlegung $Z = \{0, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \pi\}$.

   (je 2 Pkt.)

5. Es sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$. Man berechne die Ober- und Untersumme von f

   (a) bezüglich der äquidistanten Zerlegung von $[-1, 1]$ mit 5 Teilintervallen,

   (b) bezüglich der Zerlegung $Z = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$.

   (je 2 Pkt.)

6. Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Man zeige, anhanden der Definition mit Ober- und Untersummen, dass $\int_0^1 f(x) = \frac{1}{3}$. (3 Pkt.)

7. Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Man zeige, anhanden der Definition mit Ober- und Untersummen, dass $\int_0^1 f(x) = \frac{1}{2}$. (3 Pkt.)

8. Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale: (je 2 Pkt.)

   (a) $\int \left(3x^4 - \frac{1}{2}x + \cos 2x - e^{9x}\right) dx$, (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$, (c) $\int x\sqrt{1+x}\, dx$,

   (d) $\int \left(2\sin x + \sin^3 x\right) dx$, (e) $\int \coth(\beta x + \alpha)\, dx$, (f) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$,

   (g) $\int \frac{dx}{x \ln x}$.

9. Berechnen Sie: (je 1 Pkt.)

   (a) $\int \frac{\sin x}{2 + \cos x}\, dx$, (b) $\int 4x^3 \cdot e^{\frac{x^4}{5}+1}\, dx$.

10. Ermitteln Sie: (je 3 Pkt.)

    (a) $\int e^x \cos(2x+1)\, dx$, (b) $\int \arctan 3x\, dx$, (c) $\int (x^3 + 1)\ln 2x\, dx$,

    (d) $\int \cos 2x \cos x\, dx$, (e) $\int x^2 \cos 3x\, dx$.

11. Es sei $I_m^n(x) = \displaystyle\int x^m (\ln x)^n \, dx$. Leiten Sie die Rekursionsformel

$$I_m^n = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n - \frac{n}{m+1} I_m^{n-1}$$

ab und berechnen Sie damit $\displaystyle\int x^4 (\ln x)^2 \, dx$. (3 Pkt.)

12. Finden Sie Rekursionsformeln für A_n und B_n, wenn:
$A_n = \displaystyle\int x^n \cosh x \, dx$ und $B_n = \displaystyle\int x^n \sinh x \, dx$, für $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie damit $\displaystyle\int x^4 \sinh x$. (3 Pkt.)

13. Finden Sie Rekursionsformeln für A_n und B_n, wenn:
$A_n = \displaystyle\int (\cosh x)^n \, dx$ und $B_n = \displaystyle\int (\sinh x)^n \, dx$, für $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie damit $\displaystyle\int (\sinh x)^5 \, dx$ und $\displaystyle\int (\cosh x)^2 \, dx$. (3 Pkt.)

14. Ermitteln Sie die unbestimmten Integrale: (je 3 Pkt.)

(a) $\displaystyle\int 2^{\sqrt{5x+100}} \, dx$, (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$, (c) $\displaystyle\int 2^x \coth(7 \cdot 2^x) \, dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x} \, dx$, (e) $\displaystyle\int \frac{4e^{3x}}{e^{6x} + 7e^{3x} - 8} \, dx$, (f) $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{12xa - 4x^2}} \, dx$.

15. Ermitteln Sie die unbestimmten Integrale: (je 4 Pkt.)

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4 - 2x^2 + 2}} \, dx$, (b) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}} \, dx$, $a, b, > 0$.

16. Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$ mit Hilfe der Substitution $t = \tan \frac{x}{2}$. (3 Pkt.)

17. Es sei $a > 0$.
    (a) Ermitteln Sie $\displaystyle\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$. (1 Pkt.)
    Berechnen Sie danach $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2} \, dx$
    (b) durch partielle Integration, (2 Pkt.)
    (c) durch Substitution. (2 Pkt.)

18. Es sei $a > 0$.
    (a) Ermitteln Sie $\displaystyle\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} dx$. (1 Pkt.)
    Berechnen Sie danach $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2} \, dx$
    (b) durch partielle Integration, (2 Pkt.)
    (c) durch Substitution. (2 Pkt.)

19. Ermitteln Sie (je 2 Pkt.)

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin 2x}$, (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\cos 2x}$.

20. Ermitteln Sie die unbestimmten Integrale:

(je 3 Pkt.)

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\alpha-5x^2}}$, (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2bx+a^2-b^2}}$, (c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3+x^5}}{x}\,dx$, (d) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x\sqrt{x^6-x^3+1}}\,dx$.

21. Ermitteln Sie die unbestimmten Integrale:

(je 3 Pkt.)

(a) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$, (b) $\displaystyle\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$, (c) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2+3x+5)^2}\,dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^3+8x^2+4x+11}{(x^2+4)^2(x-1)}\,dx$, (e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+3x^2+3x+2}$.

22. Berechnen Sie:

(je 3 Pkt.)

(a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{1+x^3}$, (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3+6x^2+9x+5}{x^4+4x^3+5x^2}$, (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+3)^3}$.

23. Bestimmen Sie die Bogenlänge folgender Raumkurven:

(je 3 Pkt.)

(a) $\vec{x}(t) = \left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}},\ \sqrt{2}t,\ -2t^{\frac{1}{2}}\right)^T$ zwischen $A(0,0,0)$ und $B(\frac{2}{3}, \sqrt{2}, -2)$,

(b) $\vec{x}(t) = \left(e^{2t}\sin 2t,\ -e^{2t},\ e^{2t}\cos 2t\right)^T$, für $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$,

(c) $x^2 - y^2 = 1$, $z = arcosh(x)$, $y > 0$, zwischen $z = 0$ und $z = \pi$.

24. Führen Sie für die durch $\vec{x}(t) = \left(e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t\right)^T$, für $0 \le t \le \pi$, gegebene Kurve die Bogenlänge als neuen Parameter ein, wobei dem Punkt $A(1,0,1)$ die Bogenlänge $s = 0$ entsprechen soll. (je 3 Pkt.)

25. Führen Sie für die durch $\vec{x}(t) = \left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\sin t,\ \frac{1}{5}\cos t,\ \frac{1}{5\sqrt{2}}\sin t\right)^T$, für $0 \le t \le 2\pi$, gegebene Kurve die Bogenlänge als neuen Parameter ein, wobei dem Punkt $A(0, \frac{1}{5}, 0)$ die Bogenlänge $s = 0$ entsprechen soll. (3 Pkt.)

26. Wenden Sie für das Integral $\displaystyle\int_1^{1,3} \sqrt{x}\,dx$ die Formeln von Newton-Côtes an, für

(a) die Fälle $n = 1$, und $n = 4$, (b) die Fälle $n = 2$, und $n = 3$.

Schätzen Sie in jedem dieser Fälle den Fehler ab (Diskretisierungfehler). (je 2 Pkt.)

27. Wenden Sie für das Integral $\displaystyle\int_1^{1,6} \frac{1}{x^2}\,dx$ die Formeln von Newton-Côtes an, für

(a) die Fälle $n = 1$, und $n = 4$, (b) die Fälle $n = 2$, und $n = 3$.

Schätzen Sie in jedem dieser Fälle den Diskretisierungsfehler ab. (je 2 Pkt.)

28. Berechnen Sie das elliptische Integral $I = 4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin^2 t}\,dt$ (Bogenlänge der Ellipse mit Halbachsen $\sqrt{2}$ und 1)

(a) mit der Trapezregel, (b) mit der Simsonregel (n=2), (c) mit der Milne-Regel (n=4),

und vergleichen Sie die numerischen Werte mit der Näherungsformel $I \approx 2\pi\sqrt{3/2}$. (2 Pkt.)

29. Entwickeln Sie die Funktion f in eine Fourierreihe, wenn $f(x-2\pi) = f(x) = f(x+2\pi)$ und

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{für } -\pi < x < 0, \\ x^2-1, & \text{für } 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ (3 Pkt.)

(b) $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - |x|$, wobei $-\pi < x \le \pi$, (2 Pkt.)

(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } -\pi < x \le 0, \\ \sin x, & \text{für } 0 < x \le \pi, \end{cases}$ (2 Pkt.)

(d) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{für } -\pi < x \le -\frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{für } -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}, \\ -1, & \text{für } \frac{\pi}{2} < x \le \pi, \end{cases}$ (2 Pkt.)

(e) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{für } -\pi < x \le 0, \\ \sin x, & \text{für } 0 < x \le \pi. \end{cases}$ (3 Pkt.)

30. Ermitteln Sie in Abhängigkeit von $m, n \in \mathbb{N}$ die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx$, (b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx$,
(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,dx$.

(je 2 Pkt.)

31. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine periodische Funktion mit Periode $T > 0$. Man zeige, dass

$$\int_a^{a+nT} f(x)\,dx = n\int_0^T f(x+a)\,dx, \text{ wobei } a \in \mathbb{R}, \text{ und } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

(2 Pkt.)

32. Sind folgende Integrale konvergent? Wenn ja, ermittlen Sie ihren Wert:

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin x\,dx$, $a \in \mathbb{R}$, (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}$,

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^4+2x^2+2}\,dx$, (e) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(je 2 Pkt.)

33. Man studiere die Konvergenz der folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \cos(x^2)\,dx$, (b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin(7\pi x)}{\sqrt{1+13x+2x^2+9x^5}}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$, (d) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x^2\arctan x}{\sqrt{1+2x^3+x^8}}\,dx$.

(je 2 Pkt.)

34. Studieren Sie die Konvergenz der folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{dx}{-x\sqrt{3x^2+2x-1}}$, (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$,

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$, (d) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$.

(a,b,d: je 2 Pkt., c: 3 Pkt.)

35. Es sei $\alpha > 0$. Man zeige, dass $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}\,dx$ für $0 < \alpha < 1$ konvergent, und für $\alpha \ge 1$ divergent ist. (2 Pkt.)

36. Studieren Sie die Konvergenz der folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_2^4 \frac{\cos(x^2+2x+13)}{\sqrt{x-2}}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_7^{29} \frac{\arctan(3x-14)}{\sqrt[5]{x-7}}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int_0^{60} \frac{2\sin(\frac{7x}{31})-\cos 60x}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[7]{x^2}}\,dx$.

(je 1 Pkt.)

37. Studieren Sie die Stetigkeit der folgenden Funktionen, für welche $f(0,0)=0$ gilt:

(a) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (b) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$,

(c) $f(x,y)=\dfrac{x^2-xy+2y^2}{x^2+y^2}$, (d) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

(je 1 Pkt.)

38. Studieren Sie die Stetigkeit der Funktion $f(x,y)=\begin{cases} x+y\cdot\sin\left(\frac{1}{x-1}\right), & \text{für } x\neq 1,\\ 1, & \text{für } x=1, \end{cases}$ (2 Pkt.)

39. Man berechne die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen im Punkt $(0,0)$:

(a) $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x+y}\right), & \text{für } x+y\neq 0,\\ 0, & \text{für } x+y=0, \end{cases}$

(b) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{\ln(x+y^2+1)}{x+y^2}, & \text{für } x+y^2\neq 0,\\ 1, & \text{für } x+y^2=0. \end{cases}$

(c) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{(x+y)\sin(x+y)}{x^2+y^2}, & \text{für } x^2+y^2\neq 0,\\ 1, & \text{für } x^2+y^2=0. \end{cases}$

(je 2 Pkt.)

40. Gegeben sei die Funktion $f(x,y)=e^{xy}\cos(x^2-2y)$.

(a) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funtkion f im Punkt $(1,0)$ in Richtung des Vektors $\overrightarrow{v}=(1,1)$ durch zwei verschiedene Methoden. (2 Pkt.)

(b) Für welchen Vektor $\overrightarrow{v}$ ist der Anstieg der Richtungsableitung im Punkt $(1,0)$ maximal? Berechnen Sie für diesen Vektor $\partial f_{\overrightarrow{v}}(1,0)$. (1 Pkt.)

41. Gegeben sei die Funktion $f(x,y)=x^2y\ln(x+y)$.

(a) Zeigen Sie, dass f im Punkt $(1,1)$ total differenzierbar ist. (2 Pkt.)

(b) Schreiben Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z=f(x,y)$ im Punkt $(1,1)$. (1 Pkt.)

42. Man berechne die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktion F nach der Kettenregel, wenn

(a) $F(x,y,z)=x\cdot\cos(y-z)$, und $x(u,v)=2u-v^2$, $y(u,v)=u^2+v$, $z(u,v)=u\cdot v$,

(b) $F(x,y)=x+y^x$, und $x(r,\varphi)=r\cos\varphi$, $y(r,\varphi)=r\sin\varphi$,

(c) $F(x,y,z)=\frac{x}{y}+e^{x+z}$, und $x(r,\varphi,\theta)=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$.

(je 2 Pkt.)

43. Gegeben sei die Funktion $f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{für } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{für } x^2+y^2=0. \end{cases}$ Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktion f. Sind diese stetig? Berechnen Sie f_{xy}, f_{yx}, f_{xx} und f_{yy} in $(0,0)$. (3 Pkt.)

44. Finden Sie für die Funktion $f(x,y) = 3x^2 - y^2x$ die Taylorentwicklung zweiter Ordnung um den Punkt $(1,1)$. (2 Pkt.)

45. Bestimmen Sie die Hesse-Matrix H_f der Funktion $f(x,y) = x^y \sin(xy)$. Ist H_f in den Punkten $(1,1)$ und $(1,0)$ positiv definit (negativ definit, oder indefinit)? (2 Pkt.)

46. Geben Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktionen und deren Typ an:

    (a) $f(x,y) = 2x^2 + 4xy + y^4 + 2$,
    (b) $f(x,y) = xy\ln(x^2 + y^2)$,
    (c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$,
    (d) $f(x,y,z) = (x^2 - y - z)e^{x-2y+z^2}$,
    (e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

    (je 3 Pkt.)

47. Bestimmen Sie den kleinsten und den grössten Wert, den die Funktion $f(x,y) = xy^2$ in den Punkten der Menge $K = \{(x,y)\ :\ x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ annimmt. (4 Pkt.)

48. Finden Sie die Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} + \dfrac{1}{z} - z$ unter der Nebenbedingung $x + y - z = 2$. (3 Pkt.)

49. Finden Sie die stationären Punkte der folgenden Funktionen unter den gegebenen Nebenbedingungen:

    (a) $f(x,y) = x - 3y - xy$ unter der Nebenbedingung $x + y = 6$, (2 Pkt.)
    (b) $f(x,y,z) = x + y + z^2$ unter den Nebenbedingungen $x^2 - y^2 + z^2 = 1,\quad x + y = 1$. (3 Pkt.)

50. Finden Sie die Punkte der Oberfläche $xy - z^2 = 1$, die am nähesten zum Ursprung liegen. (4 Pkt.)

51. Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 8y + 2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 = 2$ durch Parametrisieren der Nebenbedingung. (4 Pkt.)

52. Es seien die Funktionen $f(x,y) = \left(e^{x+y}, \cos(xy), x\sin y\right)$ und $g(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{1+x}, x + yz\right)$. Berechnen Sie $J_g(x,y,z)$, $J_f(x,y)$ und $J_{g\circ f}(x,y)$. (3 Pkt.)

53. Berechnen Sie $div(\overrightarrow{v})$, $rot(rot\overrightarrow{v})$ und $div(rot(\overrightarrow{v}))$ für

    (a) $\overrightarrow{v}(x,y,z) = (\sin x + z, 3^x y, x + y - z)$,
    (b) $\overrightarrow{v}(x,y,z) = \left(x^3yz, xy^3z, xyz^3\right)$.

    (je 2 Pkt.)

54. Berechnen Sie $\displaystyle\int\!\!\int_D \ln(x+y)\,dxdy$, wenn $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in [0,1], y \in [1,2]\}$. (2 Pkt.)

55. Berechnen Sie $\displaystyle\int\!\!\int_D (x^2 + 2y)\,dxdy$ wenn $D \subset \mathbb{R}^2$ der von den Kurven $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ und $x = 1$ berandete Bereich ist. Skizzieren Sie D. (3 Pkt.)

56. Berechnen Sie $\displaystyle\int\!\!\int_D xy^2\,dxdy$ wenn der Rand von $D \subset \mathbb{R}^2$ von folgenden Gleichungen beschrieben wird: $y = -1$, $x = \sin(\pi y)$, $y = (x+1)^3$. Skizzieren Sie D. (3 Pkt.)

57. Für $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 2,\ x \leq y^2,\ x \geq -y^2, y \leq 0\}$ berechnen Sie $\displaystyle\int\!\!\int_D xy\,dxdy$ auf zwei verschiedenen Arten. (3 Pkt.)

58. Berechnen Sie $\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int_D dxdydz$, wenn $D = \{(x,y,z) : |x| + |y| + |z| \leq 1\}$. (3 Pkt.)

59. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes des Quaders $D = [0,1] \times [1,2] \times [0,2]$ wenn die Massenverteilung durch die Funktion $\rho(xyz) = xy^2z$ gegeben ist. (Hinweis: Siehe Skriptum Seite F-76.) (2 Pkt.)

60. Berechnen Sie mittels der Variablenänderung $u = xy$, $v = y/x$ das Integral $\int\int_D y^2\, dxdy$, wobei D der von den Kurven $y = 1/(2x)$, $y = 2/x$, $y = x/2$ und $y = 2x$ berandete Bereich ist. (3 Pkt.)

61. Berechnen Sie, mit Hilfe einer ensprechenden Variablentransformation,

    (a) $\displaystyle\int\int_D \frac{y^2}{x^2}\, dxdy$, wenn $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$,

    (b) $\displaystyle\int\int_D \arcsin\left(\frac{1}{2\pi}(x^2+y^2)^{1/2}\right) dxdy$, wenn $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$.

    (je 3 Pkt.)

62. Berechnen Sie folgende Dreifachintegrale mit Hilfe einer ensprechenden Variablentransformation:

    (a) $\displaystyle\int\int\int_K (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz$, für $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$ und $a > 0$,

    (b) $\displaystyle\int\int\int_K \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz$, für $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ und $a, b, c > 0$,

    (c) $\displaystyle\int\int\int_K \left(x^2+y^2+(z-2)^2\right)^{-\frac{1}{2}} dxdydz$, für $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$,

    (d) $\displaystyle\int\int\int_K z\, dxdydz$, wenn der Rand von K von $z^2 = 9(x^2+y^2)$, $z = 0$ und $z = 3$ beschrieben wird.

    (je 3 Pkt.)

63. Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale

    (a) $\displaystyle\int_C y^5\, ds$, für $C : x = \frac{y^4}{4}$, $y \in [0,2]$,

    (b) $\displaystyle\int_C \sqrt{y(2-y)}\, ds$, für $C : x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, \pi/2]$,

    (c) $\displaystyle\int \vec{F}\, d\vec{s}$, für $F(x,y,z) = (x \quad xy \quad xyz)$ und $C : x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = \sqrt{2}$, $t \in [0,1]$.

    (je 2 Pkt.)

64. Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = -\dfrac{y}{x}$, $(x \neq 0)$. Skizzieren Sie das entsprechende Richtungsfeld. (2 Pkt.)

65. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

    (a) $y' = \dfrac{\cos x \cdot \sin y}{\cot y}$,

    (b) $y' = \dfrac{\cos x}{(\cos y)^2}$, wobei $y(\pi) = \frac{\pi}{4}$,

    (c) $y' = \dfrac{x^3}{e^{2y}}$,

    (d) $\dfrac{y'\sqrt{1+x^2}}{xy^2} = 1$, wobei $y(1) = 2$.

    (je 2 Pkt.)

66. Bestimmen Sie den Typ der folgenden Differentialgleichungen und lösen Sie diese:

    (a) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$, wobei $(x,y) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

(b) $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$, wobei $x+y \neq 0, \quad x \neq 0$,

(c) $y' = \dfrac{xy-y^2}{x^2+y^2}$, wobei $x \neq 0$,

(d) $y' = \dfrac{2x+y}{x+y+1}$,

(e) $y' = \dfrac{2x+y+1}{2x+y-1}$.

(je 3 Pkt.)

67. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen erster Ordnung:

(a) $y' = -\dfrac{2}{x}y + x^3$, $x \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$,

(b) $y' = \dfrac{2y-x}{x}$, $x \neq 0$,

(c) $y' = -2xy + 2x \cdot e^{-x^2}$.

(je 3 Pkt.)

68. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

(a) $y' = \dfrac{y^2+2xy}{x^2}$, mit $y(2) = -\frac{8}{3}$,

(b) $y' + \dfrac{y}{3} = \dfrac{1-2x}{3}\, y^4$.

(je 3 Pkt.)

69. Finden Sie die Lösung von $4y' + y^2 + \dfrac{4}{x^2} = 0$ $(x \neq 0)$, wenn $y(1) = 1$ und wenn bekannt ist, dass diese Differentialgleichung eine spezielle Lösung der Form $y_1(x) = \frac{a}{x}$ besitzt. (4 Pkt.)

70. Lösen Sie die Gleichung $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$. (Hinweis: $y_1(x) = -\frac{1}{x}$ ist eine spezielle Lösung.)

(4 Pkt.)

71. Sind folgende Differentialgleichungen exact? Wenn ja, dann lösen Sie sie:

(a) $(1+y) + (1-x)y' = 0$, (1 Pkt.)

(b) $-\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y} \cdot y' = 0$, (3 Pkt.)

(c) $(1+x^2)y' + 2xy = 4x^3$, wobei $y(1) = 1$. (3 Pkt.)

72. Finden Sie für die Gleichung $y' = \dfrac{xy}{x^2-y^4}$ $(x, y \neq 0)$ die Lösung, für welche $y(1) = 1$ ist. (3 Pkt.)

73. Lösen Sie folgende Diffenretialgleichungen mit integrierendem Faktor:

(a) $(3x^2 - y^2)y' - 2xy = 0$,

(b) $(xy-1) + (x^2 - xy)y' = 0$.

je (3 Pkt.)

74. Studieren Sie die lineare Abhängigkeit folgender Funktionensysteme:

(a) $y_1 = \sin x, \quad y_2 = \cos x, \quad y_3 = 1,\ x \in \mathbb{R}$,

(b) $y_1 = \sin^2 x, \quad y_2 = \cos^2 x, \quad y_3 = 1,\ x \in \mathbb{R}$.

(je 2 Pkt.)

75. Lösen Sie folgende homogene lineare Diffrentialgleichungen mit konstanten Koffizienten:

(a) $y'' - y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0$,

(b) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$,

(c) $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$,

(d) $y^{(7)} + 3y^{(6)} + 3y^{(5)} + y^{(4)} = 0$,

(e) $y''' - y'' + y' - y = 0$,

(f) $64y^{(8)} + 48y^{(6)} + 12y^{(4)} + y'' = 0$,

(g) $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 3y'' + 2y' + y = 0$,

(h) $y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad y'(\frac{\pi}{2}) = 1.$ (je 2 Pkt.)

76. Finden Sie die homogene lineare Differentialgleichung und schreiben Sie ihre allgemeine Lösung, wenn man das Fundamentalsystem dazu kennt: $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$. (2 Pkt.)

77. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

(a) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^x}$,

(b) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

(je 3 Pkt.)

78. Lösen Sie folgende lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit der Ansatzmethode:

(a) $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$,

(b) $y''' - y'' = x, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = -1$,

(c) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$,

(d) $y^{(4)} - y^{(3)} - y' + y = e^x$,

(e) $y'' - y = x \cdot e^x + x + x^3 \cdot e^{-x}$,

(f) $y'' + 2y' + 2y = x \cdot e^{-x} + e^{-x} \cdot \cos x$,

(g) $y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos x - 4x \cdot e^x \cdot \sin x$,

(h) $y'' - 3y' + 2y = 14\sin(2x) - 18\cos(2x)$. (je 3 Pkt.)

79. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungssysteme $\vec{y}\,'(x) = A \cdot \vec{y}(x)$, wenn

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, (c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

(je 3 Pkt.)

80. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungssysteme $\vec{y}\,'(x) = A \cdot \vec{y}(x)$, wenn

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, (c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$,

(d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, (e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, (f) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$,

(g) $A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, (h) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

(je 4 Pkt.)

81. Lösen Sie folgende Differentialgleichungssysteme mittels der Methode der Variation der Konstanten: (je 4 Pkt.)

(a) $y_1' = y_2$, $y_2' = y_1 + e^x + e^{-x}$,

(b) $y_1' = 3y_1 - 3y_2 + 4$, $y_2' = 2y_1 - 2y_2 - 1$, wobei $y_1(0) = a$, $y_2(0) = b$,

(c) $y_1'(x) = 4y_1(x) + y_2(x) + e^{3x} + 2xe^{2x}$, $y_2'(x) = -2y_1(x) + y_2(x) - e^{3x} - 4e^{2x}$, wobei $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$.