1. Kommissar X weiß über die 4 Tatverdächtigen P, Q, R und S:
   (a) P ist genau dann schuldig, wenn Q unschuldig ist.
   (b) R ist genau dann unschuldig, wenn S schuldig ist.
   (c) Falls S Täter ist, dann auch P und umgekehrt.
   (d) Falls S schuldig ist, dann ist Q beteiligt.

   Wer ist Täter?

2. Stellen Sie die Wahrheitstafeln für folgende Ausdrücke auf.
   (a) $a \wedge \neg b$
   (b) $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$.
   (c) $a \vee \neg b$
   (d) $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$.

3. Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, falls gilt:
   $$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ gilt: } |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$
   Formulieren Sie die Aussage: f ist an der Stelle x_0 unstetig.

4. (a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Distributivgesetze für Mengen:
   $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
   (b) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
   (i) $A \subseteq B$; (ii) $A \cup B = B$.

5. Zeigen Sie für beliebige endliche Teilmengen einer Menge R:
   $$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$$
   Man leite daraus (durch mehrfache Anwendung) eine entsprechende Formel her für
   $$|A \cap B \cap C|.$$
   Hinweis: Die Formel verwendet nur Ausdrücke der Form
   $$|A|, |B|, |C|, |A \cup B|, |A \cup C|, |B \cup C| \text{ und } |A \cup B \cup C|.$$

6. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:
   $$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{1}{3} n(n^2 - 1).$$

7. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

8. (a) Zeigen Sie $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, falls $x > 0$, $y > 0$. (Hinweis: man kann an geeigneter Stelle die binomische Formel verwenden).

   (b) Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positive Zahlen. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

9. (a) Finden Sie eine natürliche Zahl t für die gilt: $2^{2t} \leq t!$. Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq t$: $2^{2n} \leq n!$.

   (b) Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$: $3^n > n^3$. (Was passiert, wenn Sie versuchen, dies bereits für $n \geq 1$ zu beweisen?)

10. Beweisen Sie für die durch

$$a_0 = 3,\ a_n = 3 - \frac{2}{a_{n-1}}, \qquad n \geq 1$$

rekursiv definierte Folge $(a_1, a_2, \ldots)$ die folgende explizite Darstellung:

$$a_n = 2 + \frac{1}{2^{n+1}-1}.$$

11. (a) In Ihrem Lieblingssupermarkt gibt es genau drei verschiedene Obstsorten. Sie wollen genau n Obststücke kaufen. Der Markt hat von jeder Obstsorte mehr als n Obststücke. Zeigen Sie, dass es

$$\frac{n!}{k_1!k_2!(n-k_1-k_2)!}$$

   Möglichkeiten gibt, k_1 Stücke der ersten Sorte, k_2 der zweiten Sorte und $n - k_1 - k_2$ Stücke der dritten Sorte auszuwählen, (wobei die Reihenfolge egal sei).

   (b) Man finde eine zum binomischen Lehrsatz analoge Formel für $(x + y + z)^n$.

12. Die Menge $\mathcal{P}(\mathcal{M}) := \{\mathcal{T} \mid \mathcal{T} \subseteq \mathcal{M}\}$, d.h. die Menge aller Teilmengen der Menge $\mathcal{M}$, heißt Potenzmenge der Menge M. Für eine endliche Menge M mit $|M| = n$ bestimme man (mit Begründung) $|\mathcal{P}(\mathcal{M})|$.

13. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} = 2^n$

(b) $\sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} = 0$

(c) $\sum_{l=0}^{n} l \binom{n}{l} = n2^{n-1}$

14. Sind die folgenden Folgen konvergent? Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an. Ebenso, wenn ein Grenzwert g existiert, geben Sie für alle $\varepsilon > 0$ ein N_ε and, so dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt $|a_n - g| < \varepsilon$.

(a) $a_n = \dfrac{(n+1)(n^2-1)}{(5n-1)(4n^2+1)}$,

(b) $b_n = \dfrac{(n+1)(n^3-1)}{(2n^2+1)(3n+1)}$.

(c) $c_n = \dfrac{(n^2+1)(3n^2+1)}{(2n^2+3)(2n^2+1)}$.

Hinweise: Versuchen Sie erst einmal die obigen Aufgaben, ohne die Hinweise unten zu lesen.
zu 11) Eine Induktion, die noch aufwendiger wird als der binomische Lehrsatz, ist hier nicht gefordert. Man kann kombinatorisch argumentieren.
zu 12) gibt es viele richtige Lösungswege.
Ebenso bei 13. 13 a) und b) kann man sicher mit Induktion oder mit dem binomischen Satz $(x+y)^n = \ldots$ beweisen.
Bei 13b). Falls n ungerade ist, sehen Sie eine weitere (sehr einfache) Erklärung?

15. Sind die folgenden Folgen konvergent? Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

(a) $\dfrac{\sqrt{16n^2+11}}{13n+1}$,

(b) $\dfrac{n^2}{3^n}$,

(c) $\dfrac{3^n}{n^2}$,

(d) $\cos(n\pi)$,

(e) $\sin(n\pi)$,

(f) $\dfrac{2^n}{n!}$,

(g) $2 + \dfrac{\cos n\pi}{n^5+11}$,

(h) $\dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-1)3n}$.

16. Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der Folge

$$x_n = \sqrt{n^2+21n+11} - \sqrt{n^2+20}$$

sowie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

17. Beweisen Sie, z.B. durch Betrachtung aller möglichen Fälle: Es sei n eine natürliche Zahl. Es sei n^2 durch 5 teilbar, dann ist auch n durch 5 teilbar. (Es sind nur endlich viele Fälle zu betrachten).

Beweisen Sie hiermit: $\sqrt{5}$ ist irrational.

18. Untersuchen Sie die durch

$$x_0 = \frac{3}{2}, \qquad x_{n+1} = \frac{2}{3-x_n} \quad (n \geq 0)$$

rekursiv definierte Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

19. Untersuchen Sie die durch

$$a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = \frac{7+3a_n}{3+a_n} \quad (n \geq 1)$$

rekursiv definierte Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert. Überlegen Sie auch kurz, was passiert, wenn Sie mit $a_1 = 2$ starten?

20. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{0.2}}{n^{0.6}+(-1)^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3}{5n^5}$

21. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(-1)^n n^2 + (-1)^{n-1} n + 5}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+5)^n(-5)^n}{(5n)!}$

22. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3\, c^n}$ für $c = 10$ und $c = 50$.

    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}(2n)!}{(4n)!}$

23. Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz, und bestimmen Sie (falls konvergent) ihre Summe:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)}$,

    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$,

    (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$,

    (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

24. Lösen Sie folgende Gleichungen über den komplexen Zahlen. Geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil der Lösung an.

    (a) $\displaystyle\frac{(1-2i)z+9}{(3-4i)z-(9-4i)} = 8+5i$,

    (b) $z^2 = 3+4i$,

    (c) $z^2 - 7z + (13+i) = 0$,

    (d) $z^2 + 3z + (6+2i) = 0$.

25. Bestimmen Sie:
    (a) Die Quadratwurzeln von $-i$.
    (b) Zeigen Sie, dass $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ eine sechste Wurzel aus 1 ist.

26. Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von $z \in \mathbb{C}$, sowie z^2 und $|z|^2$.
    a) $\displaystyle\frac{1+i}{1+2i}z = \frac{2-2i}{1-3i}$ b) $\displaystyle z = \frac{i+4}{2i-1}$ c) $z = (2-i)^2 - 7 + 3i$

27. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-i)^n}{n^3}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4-3i)^n}{n!}$.

28. Für die nachstehenden Funktionen ist zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta_\epsilon > 0$ so zu bestimmen, dass aus $|x - x_0| < \delta_\epsilon$ die Beziehung $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ folgt.

$$(a)\ f(x) = x^3, \quad D(f) = \mathbb{R},$$

$$(b)\ f(x) = \sqrt{x}, \quad D(f) = [0, \infty),$$

29. Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind:

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} -x & \text{falls } \ x < 0 \text{ oder } x > 1 \\ x^2 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(Skizze!)}$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{falls } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(Skizze!)}$$

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit in $[-\pi, \pi]$:

$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \qquad \text{(Skizze!)}$$

$$(d) \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \qquad \text{(Skizze!)}$$

30. Beweisen Sie: Ist $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \xi$. Der Punkt ξ heißt *Fixpunkt* der Funktion f. (Hinweis: betrachten Sie die Funktion $g(x) = f(x) - x$)

31. Es seien zwei Funktionen definiert durch $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Potenzreihe von g für alle $x \in \mathbb{C}$ konvergiert, d.h., dass die Funktion für $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert ist.

   (b) Beweisen Sie, dass $f(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$ und $g(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$ gilt.

   (c) Beweisen Sie, dass $g^2(x) - f^2(x) = 1$ gilt.

   (d) Weisen Sie $g(x + y) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$ nach.

   (e) Benutzen Sie die Potenzreihe, um $f(ix)$ durch $\sin(x)$ auszudrücken.

   (f) Finden Sie analog einen Ausdruck für $g(ix)$.

32. Es sei $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Berechnen Sie die ersten Koeffizienten der Potenzreihe der Tangensfunktion (entwickelt um $x_0 = 0$), bis zum Koeffizienten von x^7.
   Anleitung: Es sei $\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Wenn die a_n und b_n bekannt sind, kann man nacheinander $c_0, c_1, \ldots$ ausrechnen.

33. Drücken Sie $\sin(5s)$ nur durch $\sin(s)$ (und Potenzen hiervon) aus.

34. Geben Sie alle komplexen Lösungen von $e^z = i$ an.

35. (a) Geben Sie alle rellen Lösungen x von $\cosh x = 2$ an.

   (b) Die komplexe Funktion $\cosh z$ ist analog zur rellen definiert, für alle $z \in \mathbb{C}$. Entweder über die Potenzreihe, oder als $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$. Geben Sie alle komplexen Lösungen z von $\cosh z = \frac{1}{2}$ an.

36. Geben Sie alle komplexen Lösungen von $z^6 + (2 - 6i)z^3 = 11 + 2i$ an. Geben Sie die Lösungen jeweils in kartesischen und in Polarkoordinaten an. (Hinweis: Lösen Sie mit $w = z^3$ zunächst eine quadratische Gleichung in w.)

37. (a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $f(x) = \frac{\cos(x)-1}{x^2}$. Untersuchen Sie, ob man einen Wert für $f(0)$ angeben kann, so dass für alle Nullfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(0)$.

   (b) Die Funktion $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Untersuchen Sie, ob man einen Wert für $g(0)$ angeben kann, so dass für alle Nullfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt: $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(0)$.

38. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Ausdrücke:

   (a) $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (b) $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ (c) $\ln \dfrac{ax+b}{cx+d}$

   (d) $(1+e^x)^4 \ln(x + \sin^2(\dfrac{1}{x^2}))$ (e) $2^{x^2 \cos x}$ (f) x^x (g) $(x^x)^x$ (h) x^{x^x}

39. Zeigen Sie die folgende Ungleichung:

$$(1+x)^\alpha > 1+\alpha x\ ,\ \text{wenn}\ \ x>-1,\ x\neq 0,\ \alpha>1.$$

(Hinweis: Man betrachte die Funktion $(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$).

40. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x(1-\cos x)}\ ,\qquad (b)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{\ln x}\ \ ,$$

$$(c)\quad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}\ ,\quad (d)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}.$$

41. Ersetzen Sie folgende Funktionen durch ihre Taylorpolynome des angegebenen Grades, und schätzen Sie den Fehler im angegebenen Bereich ab:
a) $f(x)=\sin(x)$ durch $T_3(f,x,0)$ in $|x|\leq 1/10$
b) $f(x)=\arctan(x)$ durch $T_3(f,x,0)$ in $|x|\leq 1/10$

42. Entwickeln Sie die Funktion $f(x)=\arctan(x)$ in eine Potenzreihe (=Taylor-Reihe um $x=0$). Für welche Werte von x konvergiert diese Reihe? Leiten Sie daraus

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

ab. Hinweis: verwenden Sie

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{i}{x+i}-\frac{i}{x-i}\right)$$

für die Berechnung der höheren Ableitungen.

(Hinweis: Sie benötigen den Abelschen Grenzwertsatz!)

43. Diskutieren Sie die folgenden reellen Funktionen (Skizzen!):
(a) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ (b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ (c) $f(x)=x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$
(d) $f(x)=x\ \ln(x)$ (e) $f(x)=(x^2-1)e^{-x}$ (f) $f(x)=\tanh\dfrac{1}{x}$
(g) $f(x)=e^{-x}\sin x, x\geq 0$

44. Man ermittle die folgenden unbestimmten Integrale:
(a) $\displaystyle\int x^3\ln x\,dx$ (b) $\displaystyle\int x^n\ln x\,dx$ allgemein, für eine natürliche Zahl n
(c) $\displaystyle\int x^3\sin x\,dx$ (d) $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$ (e) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ Hinweis: $x=\sinh t$

45. Integrieren Sie:
$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx.$$

46. Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}+x}$.
In anderen Worten: Arbeiten Sie Bsp. 88 durch (und korrigieren Sie alle Tippfehler).

47. Integrieren Sie:
   (a) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+x+5}{x^2-1}\,dx.$
   (b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}\,dx.$
   (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos x}.$
   (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh x}.$

48. Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+x+5}{x^2-1}\,dx.$

49. Berechnen Sie
$$\int_0^2 x(\sqrt{x+1})^3\,dx.$$

50. Berechnen Sie
$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx.$$
Erklären Sie die geometrische Bedeutung dieses Integrals.

51. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die zwischen den Graphen der Funktionen $f_1(x)=\frac{x^2}{x+4}$ und $f_2(x)=\frac{x}{x+4}$ eingeschlossen ist. (Skizze!)

52. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die zwischen den Parabeln $y(x)=x^2$ und $y^2=x$ eingeschlossen ist. (Skizze!)

53. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kettenlinie $y=a\cosh(\frac{x}{a})$, $0\le x\le b$, $a,b\in\mathbb{R}$.

54. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Kettenlinie $y=a\cosh(\frac{x}{a})$ $(-a\le x\le a)$ um die x-Achse entsteht.

55. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Kurve $y^2-x^2=1$ $(-1\le x\le 1,\ y>0)$ um die x-Achse entsteht.

56. Untersuchen Sie die folgende Funktion auf Stetigkeit:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

57. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D und die partiellen Ableitungen erster Ordnung nach allen auftretenden Variablen im Innern B von D.

(a) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; (b) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10$;

(c) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{\sqrt{x+2y}}$;

58. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}$.
a) Man berechne grad $f(x,y)$
b) Man berechne die Richtungsableitung an der Stelle $\vec{x}_0 = (1,2)$ in Richtung $(3,4)$.
c) In welche Richtungen (vom Punkt $\vec{x}_0 = (1,2)$) ist die Steigung c1) maximal, c2) minimal, c3) gleich Null?
d) Man bestimme die Tangentialebene an f im Punkt $\vec{x}_0 = (1,2)$.

59. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = yx^2(4-x-y)$.
Man berechne die partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung und daraus die Hessematrix.

60. Man finde die Stellen lokaler Extrema der Funktion $f(x,y) = x+y$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1 = 0$.

61. Einem Kreis mit Radius R ist ein Dreieck maximaler Fläche einzuschreiben. Bestimmen Sie die Seitenlängen.

62. Welcher Punkt der Fläche $z = x^2 + y^2$ liegt dem Punkt $(1, 1, \frac{1}{2})$ am nächsten?