12. Die Menge $S = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Ring.

    (a) Beweisen Sie exemplarisch die folgenden Rechengesetze: für $s_1, s_2, s_3 \in S$, also $s_i = a_i + b_i\sqrt{2}$ (für $i = 1, 2, 3$), gilt $s_1 s_2 = s_2 s_1$, und $s_1(s_2 + s_3) = s_1 s_2 + s_1 s_3$.

    (b) Zeigen Sie, dass $s_1 s_2 \in S$. Warum ist S kein Körper?

    (c) Es sei $T = \{\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, (c, d) \neq (0, 0)\}$ und $U = \{r_1 + r_2\sqrt{2} : r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie, dass $T = U$ gilt. Ist T ein Körper?

13. Lösen Sie folgende Ungleichungen über den reellen Zahlen.

    (a) $\frac{x-3}{1-2x} < 0$,

    (b) $3 - x^2 + 2x > 0$,

    (c) $\frac{x}{x-2} > \frac{x-3}{3x-1}$.

    Anmerkung: Es sollen tatsächlich die *Un*gleichungen direkt gelöst werden, d.h., es sollen nicht die entsprechenden Gleichungen gelöst und einzelne „Probe"-Punkte eingesetzt werden.

14. Beweisen Sie durch Widerspruch: Es sei n eine natürliche Zahl. Wenn n^5 ungerade ist, dann ist auch n ungerade.

15. a) Es sei x eine irrationale Zahl, und y eine rationale Zahl. Beweisen Sie, dass $x + y$ eine irrationale Zahl ist.

    b) Es seien x_1 und x_2 zwei beliebige irrationale Zahlen. Untersuchen Sie, ob $x_1 + x_2$ für alle möglichen Werte von x_1, x_2 immer irrational ist.

16. Es sei $\mathbb{Z}[x]$ die Menge aller Polynome $f(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten. Jedes Polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ kann in der Form $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ geschrieben werden, wobei $a_i \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist. $\mathbb{Z}[x]$ mit der üblichen Addition und Multiplikation von Polynomen ist ein Ring.

    a) Zeigen Sie die Ring-Eigenschaften der Addition.

    b) Was ist das neutrale Element der Multiplikation? Ist $\mathbb{Z}[x]$ ein Körper?

    c) Schreiben Sie das Produkt zweier Polynome $f(x)g(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right)$ in der Form $\sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$ und geben Sie die Koeffizienten c_k (in Abhängigkeit von a_i, b_j, m und n) allgemein an, und schreiben Sie c_0, c_1, c_2, c_3 direkt hin.

    c) Sind die Polynome vom Grad 3 (oder ≤ 3) auch ein Ring?

Bitte zur 1. Klausur Analysis T1/bzw. 1a online anmelden. (Hinweis: es wird in mehreren Räumen gleichzeitig geschrieben. Der genaue Raum für Sie wird kurz vorher auf Webseite oder Übungsblatt bekanntgegeben.)