## Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

$$a^x = e^{x \ln a} \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$
$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$
$$(a^x)^y = a^{x \cdot y} \qquad \log_a (x^y) = y \cdot \log_a x$$

## Hyperbel- und Areafunktionen

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

## Trigonometrische Funktionen

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

## Additionstheoreme

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

## Doppelwinkelfunktionen

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

## 2. Additionstheoreme

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

**Polarkoordinaten**

$$r := \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \varphi := \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{falls } x>0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{falls } x<0, y\geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & \text{falls } x<0, y<0 \\ +\frac{\pi}{2}, & \text{falls } x=0, y>0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{falls } x=0, y<0 \end{cases}$$

bzw.

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

**Produkt komplexer Zahlen in Polarkoordinaten**

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot s(\cos\psi + i\sin\psi) = rs\,(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$$

**Formel von de Moivre**

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

**Wurzeln aus komplexen Zahlen** Sei $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n\in\mathbb{N}$. Dann gibt es genau $n$ komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ mit $z_j^n = w$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) \\ z_2 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ z_3 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n}\right)\right) \\ &\vdots \\ z_n &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

**Differentiationsregeln**

$$\begin{aligned} &\text{Linearität:} & (\alpha f + \beta g)' &= \alpha f' + \beta g' \\ &\text{Produktregel:} & (fg)' &= f'g + fg' \\ &\text{Quotientenregel:} & \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\ &\text{Kettenregel:} & (f\circ g)' &= (f'\circ g)\cdot g', \\ &\text{Umkehrfunktion:} & \left(f^{-1}\right)' &= \frac{1}{f'\circ f^{-1}} \end{aligned}$$

**Ableitungstabelle** In der folgenden Tabelle seien $a$, $c$, $n$ Konstanten mit $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $c$ | $0$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $a^x$ | $a^x \ln a$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x \ln a}$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\tan x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\cot x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan x$ | $\frac{1}{x^2+1}$ |
| $\operatorname{arccot} x$ | $-\frac{1}{x^2+1}$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $\sinh x$ | $\cosh x$ |
| $\cosh x$ | $\sinh x$ |
| $\tanh x$ | $\frac{1}{\cosh^2 x}$ |
| $\operatorname{arcosh} x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |
| $\operatorname{arsinh} x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $\operatorname{artanh} x$ | $\frac{1}{1-x^2}$ |

**Zweidimensionale Kettenregel**

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

**Richtungsableitung**

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{r} \qquad \text{bei Richtung } \vec{r} \text{ mit } \|\vec{r}\| = 1$$

**Regel von de L'Hospital**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

**Taylor-Polynom**

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \end{aligned}$$

## Taylor-Entwicklungen

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\cos(x) &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots \\
\sin(x) &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots \\
\exp(iy) &= \cos(y) + i\sin(y) \\
\cosh(x) &= \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
\sinh(x) &= \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \\
\ln(1+x) &= \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots \qquad \text{für } -1 < x \leq -1 \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad \text{für } |x| < 1
\end{aligned}$$

mit

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!}$$

## Kurvendiskussion

1. Definitionsbereich
2. Nullstellen: $f(x) = 0$
3. Extremwerte: $f'(x) = 0$, $f''(x) > 0$ (Minimum) bzw. $f''(x) < 0$ (Maximum) und Randuntersuchung
4. Monotonie: $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$
5. Wendepunkte: $f''(x) = 0$, $f'''(x) \neq 0$
6. Krümmung: $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$
7. Verhalten am Rand des Definitionsbereichs: Grenzwertberechnung

**Integrationsregeln**

$$\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

$$\int \lambda f(x)\ dx = \lambda \int f(x)\ dx \qquad (\lambda \text{ konstant})$$

**Stammfunktionen** In der folgenden Tabelle seien $a$, $c$, $n$ von $x$ unabhängige Konstanten mit $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

| $f(x)$ | $F(x)$ |
|---|---|
| $c$ | $cx$ |
| $x^n$ mit $n \neq -1$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ |
| $x^{-1} = \frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x$ | $\frac{a^x}{\ln a}$ |
| $\ln x$ | $x \ln x - x$ |
| $\log_a x$ | $\frac{x \ln x - x}{\ln a}$ |
| $\sin x$ | $-\cos x$ |
| $\cos x$ | $\sin x$ |
| $\tan x$ | $-\ln\lvert\cos x\rvert$ |
| $\cot x$ | $\ln\lvert\sin x\rvert$ |

| $f(x)$ | $F(x)$ |
|---|---|
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x$ |
| $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arccos x$ |
| $\frac{1}{x^2+1}$ | $\arctan x$ |
| $\frac{x^2}{x^2+1}$ | $x - \arctan x$ |
| $\sinh x$ | $\cosh x$ |
| $\cosh x$ | $\sinh x$ |
| $\tanh x$ | $\ln\lvert\cosh x\rvert$ |
| $\coth x$ | $\ln\lvert\sinh x\rvert$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ mit $x > 1$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{1}{1-x^2}$ mit $\lvert x\rvert < 1$ | $\operatorname{artanh} x$ |
| $\frac{1}{1-x^2}$ mit $\lvert x\rvert > 1$ | $\operatorname{arcoth} x$ |

**Partielle Integration**

$$\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$$

**Integration durch Substitution**

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt \quad \text{bzw.} \quad \int f(h(x))\, dx = \int f(t)\, \frac{dt}{h'(x)}$$

**Integration rationaler Funktionen** Partialbruchzerlegung und Integration der einzelnen Summanden.

**Standardsubstitutionen**

1. $\int R(e^x)\, dx$: $\qquad e^x = z,\ dx = \frac{dz}{z}$.

2. $\displaystyle\int R(\cosh x, \sinh x, \tanh x, \coth x)\,dx$:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

3. $\displaystyle\int R(\cos x, \sin x)\,dx$:

$$\tan\frac{x}{2} = t, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

4. $\displaystyle\int R(x, \sqrt{1-x^2})\,dx$: $\qquad x = \cos t,\ dx = -\sin t\,dt.$

5. $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2-1})\,dx$: $\qquad x = \cosh t,\ dx = \sinh t\,dt.$

6. $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2+1})\,dx$: $\qquad x = \sinh t,\ dx = \cosh t\,dt.$

7. $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x+a}, \sqrt{x+b})\,dx$: $\qquad x + a = u^2,\ dx = 2u\,du.$

## Laplacescher Entwicklungssatz

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} && \text{(„Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte“)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} && \text{(„Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile“)} \end{aligned}$$

## $2 \times 2$-Matrizen

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

## Regel von Sarrus

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - bdj - afh$$

## Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi, \qquad\qquad y = r\sin\varphi$$

(vgl. oben).

Jacobi-Determinante:

$$|\det J_T| = r$$

**Kugelkoordinaten**

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad\qquad x = r\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} \qquad (0 \le \varphi < 2\pi) \qquad y = r\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$\vartheta = \operatorname{arccot}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (0 \le \vartheta \le \pi) \qquad z = r\cos\vartheta$$

Jacobi-Determinante:

$$|\det J_T| = r^2 \sin\vartheta$$

**Eigenwertgleichung**

$$(A - \lambda I)\vec{x} = 0$$

**Diagonalisierung** einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und zugehörigen linear unabhängigen Eigenvektoren $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$:

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

mit $T = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \dots & \vec{x}_n \end{pmatrix}$

**Matrixpotenz**

$$A^k = TD^kT^{-1}$$

**Lösung einer homogenen Differentialgleichung**

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0$$

Charakteristisches Polynom:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

mit Nullstellen $\lambda_i$, Vielfachheiten $\mu_i$.

$$y_H(x) = C_{11}e^{\lambda_1 x} + \cdots + x^{\mu_1}C_{1\mu_1}e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_{k1}e^{\lambda_k x} + \cdots + x^{\mu_k}C_{k\mu_k}e^{\lambda_k x}$$

**Ansatzmethode** Störfunktion:

$$b(x) = e^{\alpha x}(A_m(x)\sin\beta x + B_m(x)\cos\beta x)$$

($A_m(x)$, $B_m(x)$: Polynome vom Grad $m$). $\mu$: Vielfachheit der Nullstelle $\alpha + \beta i$ bezüglich $P(\lambda)$. Ansatz:

$$y_P(x) = x^\mu e^{\alpha x}(C_m(x)\sin\beta x + D_m(x)\cos\beta x)$$

($C_m(x)$, $D_m(x)$: Polynome vom Grad $m$)

**Variation der Konstanten**

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Ansatz:

$$y_P(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$$

mit

$$\begin{aligned} C_1' y_1 + C_2' y_2 &= 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' &= b(x) \end{aligned}$$