Mathematik 2 für ChemikerInnen im Sommersemester 2020
4. Übungsblatt

12. a) Zeigen Sie, dass
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$
linear unabhängig sind.
b) Kann man einen Vektor $\vec{v}_4$ finden, so dass $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ linear unabhängig sind?
c) Sind die Vektoren $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?
d) Stellen Sie den Vektor
$$\vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$
als Linearkombination von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ dar.
(Geben Sie die Bedingungen hierzu in Form eines linearen Gleichungssystems an, und lösen Sie es.)

13. Es ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot C$ und überprüfen Sie dann das Assoziativitätsgesetz $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

14. Es sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$. (Hierbei sind alle a_{ij} und b_{ij} reelle Zahlen.) Berechnen Sie AB und BA.
Es sei nun $a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{13} = 5, a_{22} = 3, a_{23} = 0, a_{33} = 4$. Finden Sie eine geeignete Wahl für $b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{22}, b_{23}, b_{33}$, (nicht alle gleich Null!) so dass $A \cdot B = B \cdot A$ gilt.

15. Es sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $(AB)^t$ und $B^t A^t$.

16. Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem
$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = & -2 \\ -x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ & -3x_2 & +2x_3 & = & 2 \end{array}$$
in der Form $A\vec{x} = \vec{b}$ und lösen Sie es. Notieren Sie die Zeilenumformungen in einer sinnvollen Schreibweise, (z.B. wie im Skript). Lösen Sie dann das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b_2}$ mit $\vec{b_2} = (-7, 4, 0)^t$.

Überlegen Sie sich, wie man bei diesen 2 Gleichungssystemen mit der gleichen Matrix A dies so rechnen und hinschreiben kann, dass man möglichst nicht doppelte Arbeit hat.

Bitte wie üblich bis Freitag 8.00 Uhr ankreuzen, und bis 10.00 die Lösungen hochladen. (File Obergrenze ist 100MB, auch wenn 10MB sicher problemlos reichen sollte.)