13. Determinanten

13.1. Determinantenformen

Definition 13.1: Die Abbildung $\Delta : M_{n,n} \to \mathbb{R}$ habe die Eigenschaften

(a) $\Delta(\ldots, \vec{x}_\nu + \vec{x'}_\nu, \ldots) = \Delta(\ldots, \vec{x}_\nu, \ldots) + \Delta(\ldots, \vec{x}'_\nu, \ldots)$.

(b) $\Delta(\ldots, c\vec{x}_\nu, \ldots) = c\,\Delta(\ldots, \vec{x}_\nu, \ldots)$.

(c) $\Delta(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = 0$, falls die $\vec{x}_i$ linear abhängig sind.

(d) $\Delta(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) \neq 0$.

Dann heißt Δ eine Determinantenform auf $M_{n,n}$.

a) und b): linear bezüglich Matrixzeilen. c) und d): Dimension.

Satz 13.2

(a) $\Delta(\ldots,\vec{x}_\mu,\ldots,\vec{x}_\nu,\ldots) =$
$\Delta(\ldots,\vec{x}_\mu + c\vec{x}_\nu,\ldots,\vec{x}_\nu,\ldots).$

(b) $\Delta(\ldots,\vec{x}_\mu,\ldots,\vec{x}_\nu,\ldots) =$
$-\,\Delta(\ldots,\vec{x}_\nu,\ldots,\vec{x}_\mu,\ldots).$

(c) $\Delta(\vec{x}_{\pi(1)},\ldots,\vec{x}_{\pi(n)}) =$
$sgn(\pi)\ \Delta(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n).$

Fakt:

Jede Permutation von $1,\ldots,n$ läßt sich durch eine Folge von Vertauschungen zweier Zahlen schreiben. Die Anzahl der hierzu benötigten Vertauschungen ist entweder immer gerade ($sgn\,\pi = 1$) oder immer ungerade ($sgn\,\pi = -1$).

Sei $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

Wir schreiben jeden Zeilenvektor

$\vec{x}_\nu = (x_{\nu 1}, \ldots, x_{\nu n})$ in der Form

$\vec{x}_\nu = x_{\nu 1}\vec{a}_1 + \cdots + x_{\nu n}\vec{a}_n$.

Satz 13.3

$\Delta(\vec{x}_1 \ldots, \vec{x}_n) =$

$\left(\sum_\pi sgn(\pi) x_{1\pi(1)} \cdots x_{n\pi(n)}\right) \Delta(\vec{a}_1 \ldots, \vec{a}_n)$.

$\Delta(\vec{x}_1 \ldots, \vec{x}_n) = 0$

$\Longleftrightarrow$ die $\vec{x}_i$ sind linear abhängig.

Man setzt speziell: $\vec{a}_i = \vec{e}_i$.

Def. 13.4.

Die Determinantenform mit $\Delta(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) =$ 1 nennt man Determinante. Man schreibt:

$$\Delta(\vec{x}_1 \ldots, \vec{x}_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = \sum_\pi sgn(\pi) x_{1\pi(1)} \cdots x_{n\pi(n)}.$$

Bsp. 13.5

Für $n = 2$, $\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$.

Für $n = 3$,

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} =$$

$$x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32}$$

$$- x_{11}x_{23}x_{32} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{31}x_{22}x_{13}.$$

(Regel von Sarrus).

Satz 13.6

Für Matrizen $A, B \in M_{n,n}$ gilt:

$$\det(BA) = \det B \det A.$$