Technische Universität Clausthal
Institut für Mathematik
Prof. Dr. L. G. Lucht
Dr. C. Elsholtz

WS 2000/2001
31.10.2000

Ingenieurmathematik I

3. Übungsblatt

(P1) Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie:
Sind f und g surjektiv (injektiv), so ist $g \circ f$ surjektiv (injektiv).

(P2) a) Beweisen Sie, daß folgende Zahl x_1 irrational ist:
$x_1 = 0,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,\ldots 98\,99\,100\,101\,\ldots$

b) Beweisen Sie analog, daß folgende Zahl x_2 irrational ist:
$x_2 = 0,1\,4\,9\,16\,25\,36\,\ldots$

(P3) (a) Gegeben sei eine Folge (F_n) durch

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \\ F_1 &= 1, \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Folgenglieder F_0 bis F_{10}.

(b) Gegeben sei weiter eine Folge (G_n) mit

$$G_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\zeta^n + \frac{(-1)^{n+1}}{\zeta^n} \right).$$

Dabei sei ζ die positive Nullstelle von $x^2 - x - 1$.
Berechnen Sie ζ und die Folgenglieder G_0, G_1, G_2, G_3.

c) Beweisen Sie induktiv, daß für $n \geq 0$ $F_n = G_n$ ist.
Anleitung:

Induktionsbeginn:	...
Induktionsvoraussetzung:	Die Behauptung sei für $0, 1, \ldots, n+1$ (insbesondere für n und $n+1$) bereits bewiesen.
Induktionsbehauptung:	Dann gilt auch $F_{n+2} = G_{n+2}$.

- Ergänzen Sie den Induktionsbeginn und führen Sie den Induktionsschritt wie folgt aus.
- Sie wollen aus

$$\begin{aligned} F_n &= G_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\zeta^n + \frac{(-1)^{n+1}}{\zeta^n} \right) \\ F_{n+1} &= G_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\zeta^{n+1} + \frac{(-1)^{n+2}}{\zeta^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

folgern, daß $G_n + G_{n+1} = G_{n+2}$, also $F_{n+2} = G_{n+2}$ ist.
Überlegen Sie sich, daß es ausreicht,

$$\zeta^n + \zeta^{n+1} = \zeta^{n+2} \qquad \text{und} \tag{1}$$

$$\frac{(-1)^{n+1}}{\zeta^n} + \frac{(-1)^{n+2}}{\zeta^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+3}}{\zeta^{n+2}} \tag{2}$$

zu beweisen.
Benutzen Sie dazu, daß ζ Nullstelle von $x^2 - x - 1$ ist.

Anmerkungen:

- Das Verhältnis $\zeta : 1 = 1,61\ldots$ ist auch (in Kunst, Architektur, usw.) als der goldene Schnitt (sectio aurea) bekannt.
  Teilt man eine Strecke der Länge c in zwei Teilstrecken der Länge a und b so, daß $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ gilt, so verhält sich $b : a$ wie $\zeta : 1$.
- Die Zahlen F_n heißen auch Fibonacci-Zahlen und treten an verschiedenen Stellen in der Mathematik immer wieder auf.

(P4) Diskutieren Sie folgende „Beweise“:

a) Satz: Alle Elefanten sind blau.
„Beweis“ durch Induktion:

Induktionsanfang:	Für alle Mengen mit $n = 0$ Elefanten ist die Aussage korrekt.
Induktionsschritt:	Die Aussage sei bewiesen für alle Mengen mit n Elefanten. Sei nun eine Menge $\{E_1, \ldots, E_{n+1}\}$ mit $n+1$ Elefanten gegeben. Nun gilt aber für die n-elementigen Mengen $\{E_1, \ldots, E_n\}$ und $\{E_2, \ldots, E_{n+1}\}$, daß alle darin enthaltenen Elefanten blau sind. Somit ist die Aussage auch für die $(n+1)$-elementigen Mengen bewiesen.

b) Satz: Alle Pferde haben die gleiche Farbe.
„Beweis“ durch Induktion (analog zu oben):

Induktionsanfang:	Für alle Mengen mit einem Pferd $(n = 1)$ ist die Aussage korrekt.
Induktionsschritt:	Die Aussage sei bewiesen für alle Mengen mit n Pferden. Sei nun eine Menge $\{P_1, \ldots, P_{n+1}\}$ mit $n+1$ Pferden gegeben. Nun gilt aber für die n-elementigen Mengen $\{P_1, \ldots, P_n\}$ und $\{P_2, \ldots, P_{n+1}\}$, daß alle darin enthaltenen Pferde die gleiche Farbe haben. Somit ist die Aussage auch für die $(n+1)$-elementigen Mengen bewiesen.

Gilt der Einwand, den Sie gegen die Argumentation in a) hatten, auch in b)?

(H1) Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

(b) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

(H2) Beweisen Sie, daß $\sqrt[3]{5}$ irrational ist.

Name	Vorname	Fachrichtung	Fachsemester	Ü-Gruppe	Punkte

Technische Universität Clausthal
Institut für Mathematik
Prof. Dr. L. G. Lucht
Dr. C. Elsholtz

WS 2000/2001

Ingenieurmathematik I

3. Hausübungsblatt

(H1) Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

(b) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

(H2) Beweisen Sie, daß $\sqrt[3]{5}$ irrational ist.

Abgabe der Lösungen

mit diesem Deckblatt vor Ihrer kleinen Übung in der Woche vom Dienstag 7.11. bis Donnerstag 9.11.2000.