Technische Universität Clausthal
Institut für Mathematik
Prof. Dr. L. G. Lucht
Dr. C. Elsholtz
Dipl.-Math. T. Bekehermes
cand. math. S. Kubertin

WS 2000/2001

Ingenieurmathematik I

Hausübungen und Lösungen

Allgemeine Hinweise: Die Veranstalter der Vorlesung wurden mehrfach gebeten, eine schriftliche Lösung der Hausaufgaben auszuteilen. Wir danken besonders Dr. Maxsein, der uns erlaubt hat, auch von ihm mehrfach erprobte Aufgaben und Lösungen zu verwenden und die Lösungen auf diesem Wege zu verteilen. Die meisten der vorliegenden Lösungen wurden von Frau Kubertin erstellt und getippt. Auch ihr sei an dieser Stelle herzlich gedankt. Ebenso danken wir Herrn Bekehermes für das Korrekturlesen und viele weitere Hinweise an die Tutoren.
Wir verweisen darauf, daß die Lösungen sich an die Tutoren richten, und daher vielleicht an mancher Stelle zu knapp sind, an anderer Stelle vielleicht aber auch zu ausführlich sind, wenn Alternativlösungen erwähnt werden.
Wir hoffen aber, daß die Lösungen auch für Sie als Studenten hilfreich sind: Vielleicht sehen Sie besser, wie Sie ihre eigenen langen Rechnungen hätten vereinfachen können, oder welche Schritte zu einem vollständigen Beweis gefehlt haben. Sie profitieren von diesen Lösungen am meisten, wenn Sie diese nicht abheften, sondern durcharbeiten!
Eine juristische Haftung für die Korrektheit der Lösungen wird natürlich nicht übernommen.
Wenn Sie Fehler finden, senden Sie mir bitte eine Email. C. Elsholtz

1. Hausübungsblatt

1. Je einer der drei Brüder Karl, Ludwig und Martin studiert an einer der Universitäten von Aachen, Berlin und Clausthal. Sie studieren verschiedene Fächer in verschiedenen Semestern, nämlich Geotechnik, Informatik und Verfahrenstechnik. Der älteste Bruder Karl studiert nicht in Clausthal und Martin nicht in Aachen. Der Bruder in Clausthal studiert nicht Verfahrenstechnik. Der Bruder in Aachen studiert Informatik. Martin studiert nicht Geotechnik. Der Berliner Bruder hat sein Vorexamen bestanden. Die Eltern hoffen, daß alle Söhne ihr Studium in der Regelstudienzeit abschließen werden. Das Produkt ihrer Semesterzahlen ergibt 45.

   Was und wo studiert Ludwig, und im wievielten Semester ist er?

2. Bestimmen Sie die Mengen A, B, C aus den folgenden Angaben:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{2,3,4,5,6,7,8\}, & & \\ B \cup C &= \{1,2,4,6,8\}, & B \cap C &= \{4,8\}, \\ A \cup C &= \{1,2,3,4,5,7,8\}, & A \cap C &= \{2,4\}. \end{aligned}$$

Lösungen

1. Numeriere die einzelnen Sätze des Textes von (1) bis (9) durch.

   Wegen (1), (2) und (5) wird Informatik in Aachen studiert, wegen (4) Geotechnik in Clausthal, also Verfahrenstechnik in Berlin.

   Wegen (3) und (6) studiert Martin weder Informatik noch Geotechnik, also Verfahrenstechnik in Berlin. Wegen (3) studiert Karl in Aachen Informatik. Also studiert Ludwig Geotechnik in Clausthal.

   Aus (9) und (8) kommen für das Produkt 45 dreier verschiedener Zahlen < 15 aus der Teilermenge $\{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$ von 45 nur die Faktoren $1, 5, 9$ in Frage. Wegen (3) ist Karl im 9. Semester, wegen (7) Martin im 5. Semester; also ist Ludwig im 1. Semester.

   Ergebnis: Ludwig studiert im 1. Semester Geotechnik in Clausthal.

2. Fertige eine Tabelle an und markiere die Zugehörigkeit zu einer Menge durch 1, die Nicht-Zugehörigkeit durch 0.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	1	1	1	1	0	1	0
B	0	0	0	1	0	1	0	1
C	1	1	0	1	0	0	0	1

   Zuerst sieht man $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Etwa folgt aus $B \cup C = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ sofort, daß $3, 5, 7$ nur in A liegen. Aus $B \cap C = \{4, 8\}$ ergibt sich die Zugehörigkeit von $4, 8$ zu B und zu C, aus $A \cap C = \{2, 4\}$ folgt damit neben $2, 4 \in A$ weiter $8 \notin A$ usw.

   Ergebnis: $A = \{2, 3, 4, 5, 7\}$, $B = \{4, 6, 8\}$, $C = \{1, 2, 4, 8\}$.

2. Hausübungsblatt

1. Gegeben seien die nichtleeren Mengen X, Y und die Abbildung $f : X \to Y$. Ferner seien $M_1, M_2 \subseteq X$. Beweisen Sie:
   (a) $f\big(M_1 \cup M_2\big) = f(M_1) \cup f(M_2)$,
   (b) $f\big(M_1 \cap M_2\big) \subseteq f(M_1) \cap f(M_2)$.
   (c) Geben Sie ein Beispiel dafür, daß in (b) keine Gleichheit bestehen muß.

2. (a) Für genau welche natürlichen Zahlen n gilt $4^n \geq n^4$? Begründung?

(b) Für alle natürlichen Zahlen n sei

$$s_n = \sum_{1 \le \nu < 2^n} \frac{1}{\nu}\,.$$

Beweisen Sie: Für alle $n \geq 2$ gilt $\frac{n}{2} < s_n < n$. Hinweis: Betrachten Sie die Summen

$$\sum_{2^j \le \nu < 2^{j+1}} \frac{1}{\nu}\,.$$

Lösungen

1. (a) Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:
 $y \in f\big(M_1 \cup M_2\big)$,
 es existiert ein $x \in M_1 \cup M_2$ mit $y = f(x)$,
 es existiert ein $x \in M_1$ oder ein $x \in M_2$ mit $y = f(x)$,
 $y \in f\big(M_1\big)$ oder $y \in f\big(M_2\big)$,
 $y \in f\big(M_1\big) \cup f\big(M_2\big)$.
 Es folgt $f\big(M_1 \cup M_2\big) = f\big(M_1\big) \cup f\big(M_2\big)$.

 (b) Die Behauptung ist richtig für $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.
 Ist $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$, so existiert ein $y \in f\big(M_1 \cap M_2\big)$, also ein $x \in M_1 \cap M_2$ mit $f(x) = y$. Wegen $x \in M_1$ und $x \in M_2$ gilt $y \in f\big(M_1\big)$ und $y \in f\big(M_2\big)$, also $y \in f\big(M_1\big) \cap f\big(M_2\big)$. Es folgt $f\big(M_1 \cap M_2\big) \subseteq f\big(M_1\big) \cap f\big(M_2\big)$.

 (c) Es sei $M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{2\}$, und $f : \{1, 2\} \to \{0\}$ sei erklärt durch $f(1) = f(2) = 0$. Dann gilt $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, also $f\big(M_1 \cap M_2\big) = \emptyset$, aber $f\big(M_1\big) \cap f\big(M_2\big) = \{0\} \cap \{0\} = \{0\} \neq \emptyset$.

2. (a) Es gilt $4^1 = 4 \geq 1 = 1^4$, $4^2 = 16 \geq 16 = 2^4$, $4^3 = 64 \not\geq 81 = 3^4$, $4^4 = 256 \geq 256 = 4^4$. Zeige durch Induktion $4^n \geq n^4$ für alle $n \geq 4$. Für $n = 4$ ist dies schon erledigt. Es sei nun die Ungleichung schon richtig für ein $n \geq 4$. Dann folgt

$$4^{n+1} = 4 \cdot 4^n \geq 4 \cdot n^4 \geq (n+1)^4,$$

 denn die letzte Abschätzung ist korrekt wegen

$$\tfrac{(n+1)^4}{n^4} = \big(1 + \tfrac{1}{n}\big)^4 \leq \big(1 + \tfrac{1}{4}\big)^4 = \big(\tfrac{5}{4}\big)^4 = \tfrac{625}{256} \leq 4\,.$$

 Ergebnis: Die Ungleichung $4^n \geq n^4$ *besteht für genau alle natürlichen Zahlen* $n \neq 3$.

 (b) Für jedes $j \in \mathbb{N}$ hat die Summe

$$t_j := \sum_{2^j \le \nu < 2^{j+1}} \frac{1}{\nu}$$

 genau 2^j verschiedene Summanden $\frac{1}{\nu}$ mit $2^{-(j+1)} < \frac{1}{\nu} \leq 2^{-j}$. Es folgt $\frac{1}{2} < t_j < 1$. In der Zerlegung

$$s_n := \sum_{1 \le \nu < 2^n} \frac{1}{\nu} = 1 + t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}\,,\ n \geq 2)$$

stehen rechts $n \geq 2$ Summanden, die alle größer als $\frac{1}{2}$ und, abgesehen vom ersten, kleiner als 1 sind. Es folgt $\frac{n}{2} < s_n < n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, wie behauptet.

3. Hausübungsblatt

(H1) Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

(b) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

(H2) Beweisen Sie, daß $\sqrt[3]{5}$ irrational ist.

Lösungen

(H1) (a) Da $g \circ f$ surjektiv ist, gibt es zu jedem $z \in C$ ein $x \in A$ mit $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Somit existiert ein $y \in B$ (nämlich $f(x)$) mit $g(y) = z$. Also ist g surjektiv.

(b) Angenommen, f ist nicht injektiv. Dann gibt es zwei verschiedene $x_1, x_2 \in A$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Für diese gilt dann aber auch $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ bzw. $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, im Widerspruch zur Annahme.

(H2) Angenommen, es gilt $\sqrt[3]{5} = \frac{a}{b}$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen a, b.
Dann folgt: $5b^3 = a^3$. Daher ist a^3 durch 5 teilbar; wir zeigen, daß dann auch a durch 5 teilbar sein muß. Würde 5 nicht a teilen, so wäre $a = 5k + b$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \{1, 2, 3, 4\}$; dann wäre

$$a^3 = (5k + b)^3 = (5k)^3 + 3b(5k)^2 + 3b^2(5k) + b^3 = 5\tilde{k} + \tilde{b}$$

mit $\tilde{k} \in \mathbb{N}_0$ und $\tilde{b} \in \{1, 3, 2, 4\}$. Hierzu betrachte man die 4 Fälle,

$$\begin{array}{rcrl} 1^3 & = & 1 & \text{ergibt Rest 1 beim Teilen durch 5} \\ 2^3 & = & 8 & \qquad\qquad\qquad 3 \\ 3^3 & = & 27 & \qquad\qquad\qquad 2 \\ 4^3 & = & 64 & \qquad\qquad\qquad 4. \end{array}$$

Wäre also a kein Vielfaches von 5, dann wäre auch a^3 kein Vielfaches von 5. Dies zeigt, daß a doch ein Vielfaches von 5 sein muß. Mit $a = 5k$ gilt dann: $5b^3 = (5k)^3$ bzw. $b^3 = 25k^3$. Wie oben muß b durch 5 teilbar sein. Das steht aber im Widerspruch zu a, b teilerfremd.

Anmerkung: Im allgemeinen ist $\sqrt[k]{n}$ für $k, n \in \mathbb{N}$ entweder ganz oder irrational. Der Beweis erfolgt ähnlich wie hier, mit Hilfe der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.

Mittels eindeutiger Primfaktorzerlegung, die aus der Vorlesung nicht bekannt ist, kann man natürlich obigen Beweis stark vereinfachen.

4. Hausübungsblatt

(H1) (a) Beweisen Sie $2^{n-1} < n!$ für $n \geq 3$.

(b) Beweisen Sie $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$ für $n \in \mathbb{N}$.

(c) Geben Sie eine Formel für $P_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ an und beweisen Sie diese.

(H2) Geben Sie eine geschlossene Formel für $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu^2 q^\nu$ an und beweisen Sie diese.

Benutzen Sie Ihre Ergebnisse aus (P1).

Lösungen

(H1) (a) Beweis durch Induktion:
Die Aussage ist richtig für $n = 3$, da $2^{3-1} = 4 < 3! = 6$.
Die Aussage sei richtig für n, also $2^{n-1} < n!$. Dann folgt:
$2^{(n+1)-1} = 2 \cdot 2^{n-1} < 2 \cdot n! < (n+1)!$, da $n \geq 3$.

(b) Nach a) ist $k! > 2^{k-1}$, also gilt $\frac{1}{k!} < \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ für $k \geq 3$. Unter Benutzung der Formel für die geometrische Summe folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^{n-3} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) \\
&= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.
\end{aligned}$$

(c) Wendet man die dritte binomische Formel auf $\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ an, so erhält man ein Teleskop-Produkt:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)\\
&= \prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k-1}{k}\\
&= \prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k}{k+1}\\
&= \frac{n+1}{n}\cdot\left(\prod_{k=2}^{n-1}\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k}{k+1}\right)\cdot\frac{1}{2}\\
&= \frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

(H2) Für $q=1$ ergibt sich nach Aufgabenblatt 2, Aufgabe 2b)

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Sei also $q\neq 1$. Verschiebe wie in (P1) die Summationsgrenzen und benutze das Ergebnis von (P1) für $n-1$:

$$\begin{aligned}
Q_n:=\sum_{\nu=1}^{n}\nu^2q^\nu &= \sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu+1)^2q^{\nu+1}\\
&= q\cdot\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}\nu^2q^\nu+2\sum_{\nu=0}^{n-1}\nu q^\nu+\sum_{\nu=0}^{n-1}q^\nu\right)\\
&= q\cdot\left(Q_n-n^2\,q^n+2\cdot\left(\frac{(n-1)\,q^n}{q-1}-\frac{q^n-q}{(q-1)^2}\right)+\frac{q^n-1}{q-1}\right).
\end{aligned}$$

Damit folgt:
$Q_n\cdot(1-q)=-n^2q^{n+1}+\frac{2(n-1)q^{n+1}}{q-1}-\frac{2q(q^n-q)}{(q-1)^2}+\frac{q(q^n-1)}{q-1}$.
Also: $Q_n=\frac{n^2q^{n+1}}{q-1}-\frac{2(n-1)q^{n+1}}{(q-1)^2}+\frac{2q(q^n-q)}{(q-1)^3}-\frac{q(q^n-1)}{(q-1)^2}$.
Insgesamt folgt:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^2q^\nu=\begin{cases}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \text{falls } q=1\\[2ex] \frac{n^2q^{n+1}}{q-1}-\frac{2(n-1)q^{n+1}}{(q-1)^2}+\frac{2q(q^n-q)}{(q-1)^3}-\frac{q(q^n-1)}{(q-1)^2} & \text{sonst.}\end{cases}$$

(Wir machen für $n=0\quad(Q_0=0)$ und $n=1\quad(Q_1=q)$ die Probe:
$Q_0=0-\frac{-2q}{(q-1)^2}+\frac{-2q}{(q-1)^2}-0=0$.

$Q_1 = \frac{q^2}{q-1} - 0 + 0 - \frac{q}{q-1} = q$.)

Alternativlösung: Benutze $n^2 = \sum_{\nu=1}^{n}(2\nu - 1)$.

$$\begin{array}{rcccccccccc}
Q_n := \sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu^2 q^\nu & = & q & + & 4q^2 & + & 9q^3 & + & \dots & + & n^2 q^n \\
& = & q & + & q^2 & + & q^3 & + & \dots & + & q^n \\
& & & + & 3(q^2 & + & q^3 & + & \dots & + & q^n) \\
& & & & & + & 5(q^3 & + & \dots & + & q^n) \\
& & & & & & & & \ddots & & \vdots \\
& & & & & & & & & + & (2n-1)q^n.
\end{array}$$

Dann folgt mit der geometrischen Summe und mit dem Ergebnis aus (P1):

$$\begin{aligned}
Q_n &= q\,\frac{q^n - 1}{q-1} + 3q^2\,\frac{q^{n-1}-1}{q-1} + \cdots + (2n-1)q^n\,\frac{q^1 - 1}{q-1} \\
&= -\frac{1}{q-1}\left(-n^2 q^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(2k-1)q^k\right) \\
&= -\frac{1}{q-1}\left(-n^2 q^{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n} k q^k - \sum_{k=1}^{n} q^k\right) \\
&= -\frac{1}{q-1}\left(-n^2 q^{n+1} + 2\left(\frac{nq^{n+1}}{q-1} - \frac{q^{n+1}-q}{(q-1)^2}\right) - q\,\frac{q^n - 1}{q-1}\right) \quad \text{(wegen (P1))} \\
&= -\frac{1}{q-1}\left(-n^2 q^{n+1} + \frac{(2n-1)q^{n+1} + q}{q-1} - 2\,\frac{q^{n+1}-q}{(q-1)^2}\right) \\
&= \frac{1}{q-1}\left(n^2 q^{n+1} - \frac{(2n-1)q^{n+1} + q}{q-1} + 2\,\frac{q^{n+1}-q}{(q-1)^2}\right).
\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu obigem Ergebnis, auch wenn es optisch anders aussieht. Die verschieden aussehenden Teile sind:

$$\frac{-q}{(q-1)^2} - \frac{2q}{(q-1)^3} = \frac{-2q^2}{(q-1)^3} + \frac{q}{(q-1)^2}.$$

5. Hausübungsblatt

(H1) Beweisen Sie:

(a) Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0\,.$$

(b) Für alle nicht negativen ganzen Zahlen n, k gilt

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+1}{k}.$$

(H2) An einer Wurfbude auf dem Jahrmarkt werfen drei (ungeschickte?) Personen auf eine Figur je einen Ball. Die erste trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{4}$, die zweite mit einer von $\frac{2}{3}$ und die dritte mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Figur

(a) nicht getroffen wird,

(b) von allen drei Bällen getroffen wird,

(c) von genau zwei Bällen getroffen wird.

Lösungen

(H1) (a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \cdot 1^{n-k} \\
&= (1-1)^n = 0^n \\
&= 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, \text{ also } n \neq 0.
\end{aligned}$$

Alternativlösung: Benutze $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^{k+1} + (-1)^k \right) \binom{n-1}{k} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(b) **Vorbemerkung:** Die Gleichung lautet etwa für $k = 3$ und $n = 1$:

$$\binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}.$$

Im Pascalschen Dreieck stellt sich das folgendermaßen dar:

$$\begin{array}{c}
1 \\
\mathbf{1} \quad 1 \\
\underline{1} \quad \mathbf{2} \quad 1 \\
1 \quad \underline{3} \quad \mathbf{3} \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad \underline{6} \quad \mathbf{4} \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad \mathbf{10} \quad 5 \quad 1
\end{array}$$

Dabei ist die **10** Summe der **4** und der $\underline{6}$, wobei die $6 = \binom{4}{2}$, die in der Formel selbst nicht vorkommt, dort durch die Summe der Elemente $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$ ausgedrückt wird. Dies liefert die Idee für folgende Induktion:

Beweis durch Induktion über k:

Für $k = 0$ und alle nichtnegativen ganzen Zahlen n gilt:

$$\sum_{\kappa=0}^{k} \binom{n+\kappa}{\kappa} = \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = \binom{n+k+1}{k}.$$

Es gelte $\sum\limits_{\kappa=0}^{k} \binom{n+\kappa}{\kappa} = \binom{n+k+1}{k}$ für alle nichtnegativen ganzen Zahlen n und für ein festes k. Dann folgt für $k+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=0}^{k+1} \binom{n+\kappa}{\kappa} &= \sum_{\kappa=0}^{k} \binom{n+\kappa}{\kappa} + \binom{n+k+1}{k+1} \\ &= \binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} \\ &= \binom{n+k+2}{k+1}. \end{aligned}$$

(H2) Es sei E_i das Ereignis, daß die i-te Person trifft $(i \in 1,2,3)$, und $p_i = P(E_i)$, also $p_1 = \frac{3}{4}$, $p_2 = \frac{2}{3}$ und $p_3 = \frac{1}{2}$.

(a) $P(\neg E_1 \wedge \neg E_2 \wedge \neg E_3) = P(\neg E_1) \cdot P(\neg E_2) \cdot P(\neg E_3) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$.

(b) $P(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) = p_1 p_2 p_3 = \frac{1}{4}$.

(c) $P((E_1 \wedge E_2 \wedge \neg E_3) \vee (E_1 \wedge \neg E_2 \wedge E_3) \vee (\neg E_1 \wedge E_2 \wedge E_3))$

$$\begin{aligned} &= P(E_1 \wedge E_2 \wedge \neg E_3) + P(E_1 \wedge \neg E_2 \wedge E_3) + P(\neg E_1 \wedge E_2 \wedge \neg E_3) \\ &= p_1 p_2 (1-p_3) + p_1 (1-p_2) p_3 + (1-p_1) p_2 p_3 = \frac{6}{24} + \frac{3}{24} + \frac{2}{24} = \frac{11}{24}. \end{aligned}$$

6. Hausübungsblatt

(H1) (a) Berechnen Sie die Werte der anderen trigonometrischen Funktionen aus

(i) $\sin\varphi = \frac{7}{25}$, (ii) $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, (iii) $\tan\varphi = \frac{12}{5}$.

(b) Zu welchen Winkeln φ_0 mit $0 < \varphi_0 < \pi$ gehören die Werte aus a) jeweils? Geben Sie dann alle Winkel $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ mit den Werten aus a) an.

(c) Geben Sie eine Tabelle aller Umrechnungsformeln zwischen den Werten von je zwei der trigonometrischen Funktionen sin, cos, tan und cot an.

(H2) Untersuchen Sie, ob die Bildmenge $f(D)$ mit $D = (-1, \infty)$ der Funktion

$$x \longmapsto y = f(x) = \frac{x}{1+x}$$

beschränkt ist; bestimmen Sie ggf. $\sup f(D)$ und $\inf f(D)$, und skizzieren Sie die Funktion.

Lösungen

(H1) Zunächst die allgemeinen Umrechnungsformeln:

(c) Ist $\sin\varphi$ gegeben, so folgt mit $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$:

$$\cos\varphi = \pm\sqrt{1-\sin^2\varphi} \quad \text{sowie}$$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}} \quad \text{und} \quad \cot\varphi = \frac{1}{\tan\varphi} = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}.$$

Ist $\cos\varphi$ gegeben, so folgt mit $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$:

$$\sin\varphi = \pm\sqrt{1-\cos^2\varphi} \quad \text{sowie}$$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} \quad \text{und} \quad \cot\varphi = \frac{1}{\tan\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}.$$

Es sei $\tan\varphi$ gegeben; aus $\tan^2\varphi = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1$ folgt dann $\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \tan^2\varphi$, also:

$$\cos\varphi = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}.$$

Aus $\frac{1}{\tan^2\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\varphi} - 1$ folgt dann entsprechend $\frac{1}{\sin^2\varphi} = 1 + \frac{1}{\tan^2\varphi} = \frac{\tan^2\varphi+1}{\tan^2\varphi}$, also:

$$\sin\varphi = \pm\frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}.$$

Ist $\cot\varphi$ gegeben, so folgen mit $\cot\varphi = \frac{1}{\tan\varphi}$ die übrigen Formeln.

Insgesamt hat man:

ges. / geg.	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$	$\cot\varphi$
$\sin\varphi$	—	$\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}$	$\pm\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}$
$\cos\varphi$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}$	—	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}$	$\frac{\cos\varphi}{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}$
$\tan\varphi$	$\pm\frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$	—	$\frac{1}{\tan\varphi}$
$\cot\varphi$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\varphi}}$	$\pm\frac{\cot\varphi}{\sqrt{1+\cot^2\varphi}}$	$\frac{1}{\cot\varphi}$	—

Dabei sind die Vorzeichen so zu wählen, daß $\sin\varphi$ für $\varphi \in [0,180^\circ]$ positiv, für $\varphi \in (180^\circ, 360^\circ)$ negativ ist, usw., also gemäß folgender Tabelle:

$\varphi \in$	$(0, 90^\circ]$	$(90^\circ, 180^\circ]$	$(180^\circ, 270^\circ]$	$(270^\circ, 360^\circ]$
$\sin\varphi$	+	+	-	-
$\cos\varphi$	+	-	-	+
$\tan\varphi$	+	-	+	-
$\cot\varphi$	+	-	+	-

(a) Nach den Formeln aus (c) ergibt sich:

(i) $\sin\varphi = \frac{7}{25} \quad\Rightarrow\quad \cos\varphi = \frac{24}{25}, \quad \tan\varphi = \frac{7}{24}, \quad \cot\varphi = \frac{24}{7}.$

(ii) $\cos\varphi = \frac{3}{5} \quad\Rightarrow\quad \sin\varphi = \frac{4}{5}, \quad \tan\varphi = \frac{4}{3}, \quad \cot\varphi = \frac{3}{4}.$

(iii) $\tan\varphi = \frac{12}{5} \quad\Rightarrow\quad \sin\varphi = \frac{12}{13}, \quad \cos\varphi = \frac{5}{13}, \quad \cot\varphi = \frac{5}{12}.$

(b)

zu (a)(i) $\varphi_1 = \arcsin\frac{7}{25} = 0.28\cdots$.
$\varphi_2 = \pi - \varphi_1 = 2.85\cdots$. Außerdem $\varphi = \varphi_{1,2} + 2k\pi$, mit $k \in \mathbb{Z}$.

zu (a)(ii) $\varphi_1 = \arccos\frac{3}{5} = 0.927\cdots$.
Der zweite Wert $\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1 = 5.35\cdots$. liegt nicht im gesuchten Intervall. Alle anderen Werte erhält man aus φ_1 und φ_2 durch Addition von $2k\pi$.

zu (a)(iii) $\varphi_1 = \arctan\frac{12}{5} = 1.17\cdots$. Da die Tangensfunktion die Periode π hat, außerdem $\varphi = \varphi_1 + k\pi$, mit $k \in \mathbb{Z}$.

(H2) Es ist $y = f(x) > 0$ genau für $x > 0$, also für $x = |x|$. Also gilt wie in (P1) $y < 1$ für alle $y \in f(D)$. Damit existiert das Supremum von $f(D)$, und wie in (P1) folgt $\sup f(D) = 1$.

Angenommen, es wäre $\inf f(D) = \xi \in \mathbb{R}$ $(\xi \le \sup f(D) = 1)$.
Betrachte dann $x = \frac{\xi-1}{2-\xi} = -1 + \frac{1}{2-\xi} \in D$; es ist also $f(x) = f(\frac{\xi-1}{2-\xi}) = \frac{\frac{\xi-1}{2-\xi}}{\frac{1}{2-\xi}} = \xi - 1 \in f(D)$ mit $f(x) < \xi$ im Widerspruch zur Annahme. Also existiert $\inf f(D)$ nicht.

$f(D)$ ist also nach oben beschränkt, nach unten aber nicht.

7. Hausübungsblatt

(H1) Rechnen Sie folgende Identitäten nach:

(a) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, (b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$.

(c) Drücken Sie $\cos 3x$ analog zu (P1 c) aus.

(H2) (a) Zeigen Sie, daß für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y\,.$$

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{Arcosh} x = \ln\big(x + \sqrt{x^2-1}\big)$?

Lösungen

(H1) (a) Benutze das Additionstheorem $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
Damit bekommt man für $a := \frac{x+y}{2}$ und $b := \frac{x-y}{2}$:

$$\cos x = \cos(a+b) = \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Weiter folgt aus dem Additionstheorem für $a := \frac{y+x}{2}$ und $b := \frac{y-x}{2}$:

$$\begin{aligned}\cos y = \cos(a+b) &= \cos\left(\frac{y+x}{2}\right)\cos\left(\frac{y-x}{2}\right) - \sin\left(\frac{y+x}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\\ &= \cos\left(\frac{y+x}{2}\right)\cos\left(\frac{y-x}{2}\right) + \sin\left(\frac{y+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).\end{aligned}$$

Durch Addition dieser beiden Beziehungen folgt die Behauptung:
$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

Alternative Lösung unter Benutzung von (P1 a):

$$\begin{aligned}
\cos x + \cos y &= \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(\frac{\pi}{2} - y) \\
&= 2 \sin\left(\frac{(\frac{\pi}{2} - x) + (\frac{\pi}{2} - y)}{2}\right) \cos\left(\frac{(\frac{\pi}{2} - x) - (\frac{\pi}{2} - y)}{2}\right) \\
&= 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{y-x}{2}\right) \\
&= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) .
\end{aligned}$$

(b) Ebenfalls mit obigem Additionstheorem folgt:

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1 .$$

(c) Verwende erneut das Additionstheorem für $\cos(a + b)$ mit $a := 2x$ und $b := x$ und benutze die Ergebnisse aus (b) sowie (P1 b). Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\cos 3x = \cos(2x + x) &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\
&= (2\cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x \\
&= \Big(2\cos^2 x - 1 - 2(1 - \cos^2 x)\Big) \cos x \\
&= (4\cos^2 x - 3) \cos x = -3 \cos x + 4 \cos^3 x .
\end{aligned}$$

(H2) (a) Mit den Definitionen von $\sinh x$ und $\cosh x$ erhält man wie in (P2 a):

$$\begin{aligned}
\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y &= \frac{1}{4}\Big(\big(e^x + e^{-x}\big)\big(e^y + e^{-y}\big) + \big(e^x - e^{-x}\big)\big(e^y - e^{-y}\big)\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(\big(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-(x+y)}\big) \\
&\qquad + \big(e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-(x+y)}\big)\Big) \\
&= \frac{1}{4}\big(2e^{x+y} + 2e^{-(x+y)}\big) = \cosh(x + y) .
\end{aligned}$$

(b) Da $\cosh x$ nur Werte ≥ 1 annimmt, ist $\operatorname{Arcosh} x$ nur für $x \geq 1$ definiert. Tatsächlich gilt die Formel auch für alle $x \geq 1$.

Rechne analog zu (P2 b): Setze $y := \operatorname{Arcosh} x$. Dann ist also $x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$.

Damit folgt weiter:

$$\begin{aligned}
2x = e^y + \frac{1}{e^y} \quad &\Longrightarrow \quad 2xe^y = e^{2y} + 1 \\
&\Longrightarrow \quad -1 = e^{2y} - 2xe^y \\
&\Longrightarrow \quad x^2 - 1 = e^{2y} - 2xe^y + x^2 = (e^y - x)^2 \\
\Longrightarrow \text{(s.u.)} \quad & \quad \sqrt{x^2-1} = e^y - x \\
&\Longrightarrow \quad e^y = x + \sqrt{x^2-1} \\
&\Longrightarrow \quad y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \ .
\end{aligned}$$

Ergänzung: Wir benötigen $e^y - x \geq 0$. Nach Definition von x ist $e^y - x = e^y - \cosh y = \sinh y$. Nun ist aber $\sinh y \geq 0$ genau für $y \geq 0$. Wegen $y = \operatorname{Arcosh} x$ ist also nach Definition des Arcosh hier $y \geq 0$.
Alternativlösung: Zeige, daß $\cosh\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right) = x$ für alle $x \geq 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\cosh\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right) &= \frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} + e^{-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^2 + 1}{x + \sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2-1} + x^2 - 1 + 1}{x + \sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2x = x.
\end{aligned}$$

8. Hausübungsblatt

(H1) Berechnen und skizzieren Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit:

(a) $|z - z_0| \geq R$, (b) $|z-2| < |z|$, (c) $\operatorname{Re}(z^2) = 0$,
(d) $\operatorname{Re} z = 2 \operatorname{Im} z + 1$, (e) $|z+i| + |z-i| \leq 4$.

(H2) Es seien $z, w, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Rechnen Sie nach, daß

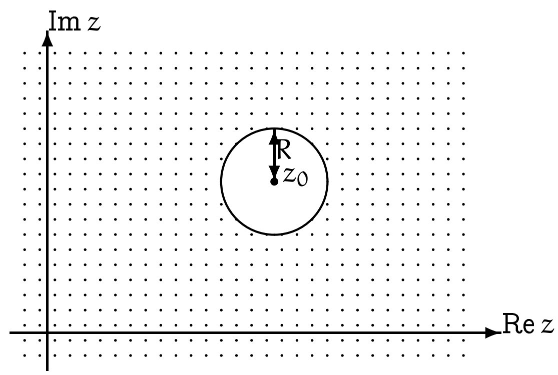
$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right) \tag{$*$}$$

gilt. Folgern Sie dann mit der Gleichung $(*)$:

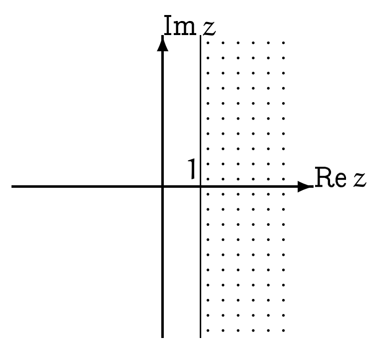
(a) Aus $|z_1 + z_2| \le 1$ und $|z_1 - z_2| \le 1$ folgt $|z_1|^2 + |z_2|^2 \le 1$.
(b) Aus $|z_1|^2 + |z_2|^2 \le 1$ folgt $|z_1 - z_2| \le 1$ oder $|z_1 + z_2| \le 1$.
(c) Gilt die Umkehrung zu (a)?

Lösungen

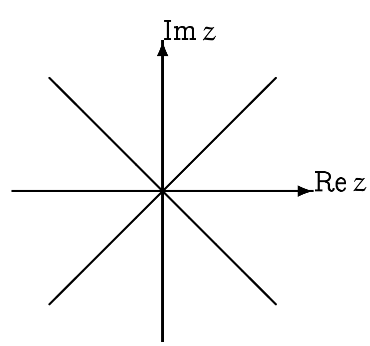
(H1) (a) $|z - z_0| \ge R$ beschreibt die ganze Ebene mit Ausnahme einer offenen Kreisscheibe um z_0 mit Radius R. (Die Kreislinie gehört also zu der Menge.)



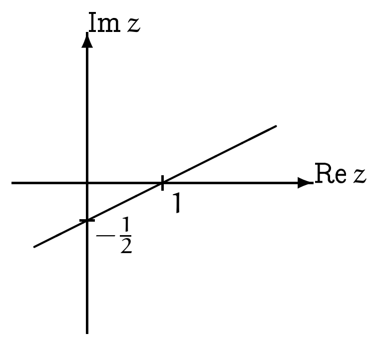
(b) $|z-2| < |z|$ ist genau dann erfüllt, wenn $|z-2|^2 < |z|^2$, mit $z = x + iy$ also genau im Falle $(x-2)^2 + y^2 < x^2 + y^2$, somit genau für z mit $-4x + 4 < 0$ bzw. $x > 1$. Das ist die Menge aller Punkte, die zum Punkt $z = 2$ einen kürzeren Abstand haben, als zu $z = 0$.



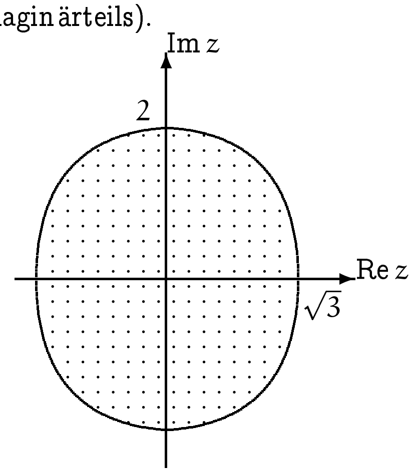
(c) $\mathrm{Re}(z^2) = 0$ ist für $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$ äquivalent zu $x^2 = y^2$. Dies gilt genau für die Winkelhalbierenden $y = \pm x$.



(d) $\operatorname{Re} z = 2 \operatorname{Im} z + 1$ ist gleichbedeutend mit $x = 2y + 1$ oder auch $y = \frac{x-1}{2}$.



(e) $|z + i| + |z - i| \leq 4$ gilt, falls die Summe der Abstände von z zu i und $-i$ nicht größer als 4 ist. Die Ungleichung beschreibt also das Innere einer Ellipse mit den Brennpunkten i und $-i$ und Halbachsen der Länge $\sqrt{3}$ (in Richtung des Realteils) und 2 (in Richtung des Imaginärteils).



(H2) Es gilt für $z, w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} |z+w|^2 + |z-w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) + (z-w)(\overline{z-w}) \\ &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) + (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} + z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + \bar{w}w \\ &= 2(|z|^2 + |w|^2)\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

(a) Mit $(*)$ folgt $2(|z_1|^2+|z_2|^2) = |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 \leq 1+1 = 2$, also die Behauptung.

(b) Angenommen, es gilt $|z_1 + z_2| > 1$ und gleichzeitig $|z_1 - z_2| > 1$, dann folgt wie in (a) $2(|z_1|^2+|z_2|^2) = |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 > 2$, also $|z_1|^2+|z_2|^2 > 1$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

(c) Das Beispiel $z_1 = z_2 = \frac{2}{3}$ zeigt, daß die Umkehrung zu (a) nicht gilt. Es ist dann $|z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{8}{9} \leq 1$, aber es gilt nur $|z_1 - z_2| \leq 1$ und nicht $|z_1 + z_2| \leq 1$.

9. Hausübungsblatt

(H1) Für eine natürliche Zahl n seien $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ die n-ten komplexen Einheitswurzeln. Berechnen Sie

$$\prod_{\nu=1}^{n} \zeta_\nu.$$

Unterscheiden Sie hierbei zwischen geradem und ungeradem n.

(H2) (a) Bestimmen Sie die komplexe und die reelle Produktzerlegung von $x^4 + 1$.

(b) Bestimmen Sie die relle Partialbruchzerlegung von $f(x) = \frac{x^6 - x^5 + x^4}{x^4 + 1}$.

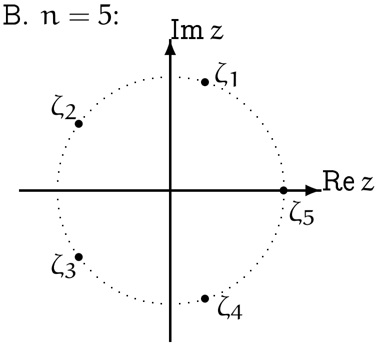
Lösungen

(H1) 1. Lösung Es sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Bei geeigneter Numerierung der ζ_ν ist dann $\zeta_\nu = \zeta^\nu$. Damit folgt:

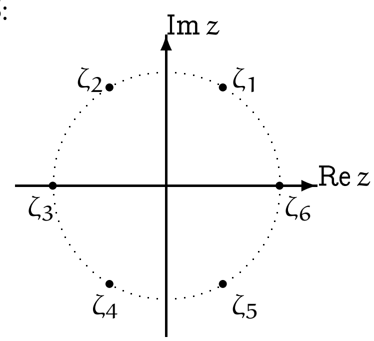
$$\begin{aligned} \prod_{\nu=1}^{n} \zeta_\nu = \prod_{\nu=1}^{n} \zeta^\nu &= \zeta^{1+2+\cdots+n} = \zeta^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}} = e^{\pi i (n+1)} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ -1, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

2. Lösung Betrachte die geometrische Lage der Wurzeln auf dem Einheitskreis:

z.B. $n = 5$:



oder $n = 6$:



Es gilt $\zeta \cdot \bar{\zeta} = 1$ für konjugierte Wurzeln. $\prod_{\nu=1}^{n} \zeta_\nu$ ist das Produkt über Paare von konjugierten Wurzeln multipliziert mit den Wurzeln, die gleich ihrem Konjugierten sind (diese sind 1 und, falls n gerade ist, auch -1). Somit ist $\prod_{\nu=1}^{n} \zeta_\nu = 1$, falls n ungerade, und $\prod_{\nu=1}^{n} \zeta_\nu = 1 \cdot (-1) = -1$, falls n gerade.

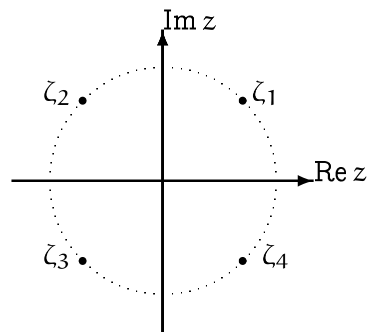
3. Lösung Da die ζ_ν die Nullstellen des Polynoms $x^n - 1$ sind, gilt:

$$(x - \zeta_1)(x - \zeta_2) \cdots (x - \zeta_n) = x^n - 1 \,.$$

Koeffizientenvergleich liefert $(-1)^n \prod\limits_{\nu=1}^{n} \zeta_\nu = -1$, und daher gilt:

$$\prod_{\nu=1}^{n} \zeta_\nu = (-1)^{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ -1, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

(H2) (a) Die komplexe Produktzerlegung ist $x^4+1 = (x-\zeta_1)(x-\zeta_2)(x-\zeta_3)(x-\zeta_4)$, wobei die ζ_ν die vierten komplexen Wurzeln von -1 sind.



Im einzelnen ist $\zeta_1 = e^{\frac{1}{8}2\pi i}$, $\zeta_2 = e^{\frac{3}{8}2\pi i}$, $\zeta_3 = \bar\zeta_2 = e^{\frac{5}{8}2\pi i}$, $\zeta_4 = \bar\zeta_1 = e^{\frac{7}{8}2\pi i}$.
Um die reelle Produktzerlegung zu erhalten, faßt man jeweils die konjugierten Faktoren zusammen:

$$\begin{aligned} x^4+1 &= \big((x-\zeta_1)(x-\bar\zeta_1)\big)\cdot\big((x-\zeta_2)(x-\bar\zeta_2)\big) \\ &= \Big(x^2-(\zeta_1+\bar\zeta_1)\,x+\zeta_1\bar\zeta_1\Big)\cdot\Big(x^2-(\zeta_2+\bar\zeta_2)\,x+\zeta_2\bar\zeta_2\Big)\,. \end{aligned}$$

Dabei ist $(\zeta_1+\bar\zeta_1) = 2\,\mathrm{Re}\,\zeta_1 = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ und $(\zeta_2+\bar\zeta_2) = 2\,\mathrm{Re}\,\zeta_2 = 2\cos\frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2}$. Ferner gilt auf dem Einheitskreis im allgemeinen $\zeta\bar\zeta = |\zeta|^2 = 1$. Also ist die reelle Produktdarstellung:

$$x^4+1 = (x^2-\sqrt{2}\,x+1)(x^2+\sqrt{2}\,x+1)\,.$$

(b) Mit Polynomdivision erhält man:

$$\begin{array}{l} (x^6-x^5+x^4) : (x^4+1) \quad = \quad x^2-x+1-\frac{x^2-x+1}{x^4+1} \\ \underline{x^6 \qquad\qquad +x^2} \\ -x^5+x^4-x^2 \\ \underline{-x^5 \qquad\qquad -x} \\ \qquad x^4-x^2+x \\ \qquad \underline{x^4 \qquad\qquad +1} \\ \qquad\quad -x^2+x-1 \end{array}$$

Alternativ zur Polynomdivision führt auch folgende Rechnung zum Ziel:

$$\frac{x^6-x^5+x^4}{x^4+1} = \frac{x^4\,(x^2-x+1)}{x^4+1} = \frac{(x^4+1-1)\,(x^2-x+1)}{x^4+1} = x^2-x+1-\frac{x^2-x+1}{x^4+1}\,.$$

Für die reelle Partialbruchzerlegung von $\frac{x^2-x+1}{x^4+1}$ macht man aufgrund der in (a) bestimmten reellen Produktzerlegung von x^4+1 folgenden Ansatz:

$$\frac{x^2-x+1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 &= (Ax + B)\,(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1) + (Cx + D)\,(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1) \\ &= Ax^3 - \sqrt{2}\,Ax^2 + Ax + Bx^2 - \sqrt{2}\,Bx + B + \\ &\quad\ Cx^3 + \sqrt{2}\,Cx^2 + Cx + Dx^2 + \sqrt{2}\,Dx + D\,. \end{aligned}$$

Weiter erhält man durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrl} \text{für } x^3: & A & + & & & C & & & = & 0, & (1) \\ \text{für } x^2: & -\sqrt{2}\,A & + & B & + & \sqrt{2}\,C & + & D & = & 1, & (2) \\ \text{für } x: & A & - & \sqrt{2}\,B & + & C & + & \sqrt{2}\,D & = & -1, & (3) \\ \text{für } 1: & & & B & + & & & D & = & 1. & (4) \end{array}$$

Aus (1) und (3) folgt: $-\sqrt{2}\,B + \sqrt{2}\,D = -1$.
Mit (4) ergibt sich $B = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$ und $D = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$. Aus (2) und (4) folgt entsprechend $-\sqrt{2}\,A + \sqrt{2}\,C = 0$, und wegen (1): $A = C = 0$.

Also bekommt man die folgende Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^6 - x^5 + x^4}{x^4 + 1} = x^2 - x + 1 - \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}\,(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)} - \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}\,(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)}.$$

10. Hausübungsblatt

(H1) Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}_1 = (1,2,3)$, $\vec{a}_2 = (3,-1,2)$, $\vec{a}_3 = (2,1,3)$, $\vec{a}_4 = (1,3,2)$.

(a) Vier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind immer linear abhängig. Rechnen Sie dies für die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ und $\vec{a}_4$ nach.

(b) Sind die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, und $\vec{a}_4$ linear abhängig?

(H2) Durch die Punkte $A = (1,1,1)$, $B = (1,0,1)$, $C = (3,4,0)$ ist ein Dreieck gegeben. Berechnen Sie

(a) die Seitenlängen, die Fläche und den Winkel bei A,

(b) den Vektor der Höhe durch C,

(c) die Richtung der Winkelhalbierenden durch A,

(d) das Volumen des Tetraeders mit den Ecken A, B, C und $(0,0,0)$.

Lösungen

(H1) (a) $x_1\,\vec{a}_1 + x_2\,\vec{a}_2 + x_3\,\vec{a}_3 + x_4\,\vec{a}_4 = \vec{0}$ ist gleichbedeutend mit dem System:

$$\begin{array}{rcll} x_1+3x_2+2x_3\ +x_4 &=& 0 & |\cdot(-2)\quad |\cdot(-3) \\ 2x_1\ -x_2\ +x_3+3x_4 &=& 0 & |+ \\ 3x_1+2x_2+3x_3+2x_4 &=& 0 & \qquad\qquad |+ \end{array} \quad\Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcll} x_1\ \ +3x_2+2x_3+x_4 &=& 0 & (1) \\ -7x_2-3x_3+x_4 &=& 0 & (2) \\ -7x_2-3x_3-x_4 &=& 0 & (3) \end{array}$$

Aus (2) und (3) folgt $x_4 = 0$; damit ist das System erfüllt für $x_1 = -3x_2 - 2x_3$ $(*)$ mit $7x_2 = -3x_3$ $(**)$, also etwa für $x_2 = 3$, $x_3 = -7$, $x_1 = -9 + 14 = 5$ und $x_4 = 0$. Es ist also $5\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - 7\vec{a}_3 = \vec{0}$, d.h., die vier Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ sind linear abhängig. (Insbesondere sind bereits $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ linear abhängig.)

Anmerkung: Vier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ müssen linear abhängig sein!

(b) Es gilt dieselbe Rechnung wie in (a) mit $x_2 = 0$. Dann verschwinden aber neben x_4 wegen $(**)$ auch x_3 und wegen $(*)$ auch x_1. Aus $x_1\,\vec{a}_1 + x_3\,\vec{a}_3 + x_4\,\vec{a}_4 = \vec{0}$ folgt somit $x_1 = x_3 = x_4 = 0$. Also sind $\vec{a}_1$, $\vec{a}_3$ und $\vec{a}_4$ linear unabhängig.

Alternativ: Es ist:

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 18 + 6 - (3 + 9 + 8) = 26 - 20 = 6 \neq 0$$

(H2) (a) Die Seiten des Dreiecks sind die Vektoren:

$$\vec{a} := \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} := \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} := \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Seitenlängen sind daher $|\vec{a}| = \sqrt{21}$, $|\vec{b}| = \sqrt{14}$ und $|\vec{c}| = 1$.
Für den Flächeninhalt gilt:

$$F_\triangle = \tfrac{1}{2}\,|\vec{a} \times \vec{c}| = \tfrac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\,.$$

Anmerkung: Es gilt (wegen $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$)

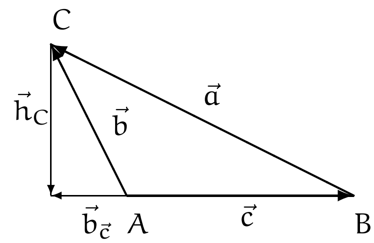
$$F_\triangle = \frac{1}{2}\,|\vec{a} \times \vec{c}| = \frac{1}{2}\,|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}\,|\vec{b} \times \vec{c}|\,.$$

Wegen der Nullen in $\vec{c}$ ist es praktisch, nicht $\frac{1}{2}\,|\vec{a} \times \vec{b}| =$ zu verwenden.
Der Winkel bei A ist $\sphericalangle(\vec{b}, \vec{c})$ mit

$$\cos \sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{-3}{\sqrt{14}}$$

und somit $\sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) = \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{14}}\right) = 2{,}501\ldots = 143{,}300\ldots^\circ$ (da $\sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) \in (0, \pi)$).

(b) Zerlegt man $\vec{b}$ orthogonal, so erhält man $\vec{b} = -\vec{h}_C + \vec{b}_{\vec{c}}$ gemäß der Skizze:



Damit ist:

$$\begin{aligned}\vec{h}_C &= \vec{b}_{\vec{c}} - \vec{b}\\ &= \frac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{|\vec{c}|^2}\cdot\vec{c} - \vec{b}\\ &= \frac{-3}{1^2}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(c) Ein Richtungsvektor der Winkelhalbierenden ist die Summe der normierten Vektoren der beiden angrenzenden Schenkel. Daher bekommt man:

$$\vec{w} = \vec{b}_0 + \vec{c}_0 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}2\\3-\sqrt{14}\\-1\end{pmatrix}.$$

(d) Das Volumen des von den drei Vektoren $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ aufgespannten Spates ist:

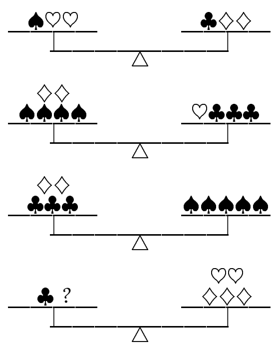
$$V_{\text{Spat}} = \left[\vec{OA}\quad\vec{OB}\quad\vec{OC}\right] = \begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 0 & 4\\1 & 1 & 0\end{vmatrix} = 0+4+3-(0+4+0) = 3\,.$$

Also ist $V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{6}V_{\text{Spat}} = \frac{1}{2}$.
(Erläuterung: Bsp. 8.48 des Skriptes. Die Grundfläche ist ein halbes Parallelogramm. Die Fläche des Parallelogrammes entspricht dem Kreuzprodukt (in der Definition des Spatproduktes).
Volumen des Tetraeders = ein Drittel mal Grundfläche mal Höhe, daher also ein Sechstel des Spatvolumens.)

11. Hausübungsblatt

(H1) Es sei g die Gerade durch die Punkte $(-2,-2)$ und $(4,1)$. Welche Geraden durch $(1,1)$ bilden mit g einen Winkel von $30°$?

(H2) Die drei oberen Waagen sind in völligem Gleichgewicht. Wie viele Pik (♠) sind nötig, um die Waage unten auszugleichen? (Die Gewichte sind positiv, aber unbekannt.)



Lösungen

(H1) Der Richtungsvektor von g ist $\binom{6}{3}$ bzw. $\binom{2}{1} =: \vec{c}$. Gesucht sind Vektoren $\vec{u}$, die mit $\vec{c}$ einen Winkel von $30°$ einschließen. Für derartige $\vec{u} = \binom{u_1}{u_2}$ muß gelten:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\sphericalangle(\vec{c},\vec{u})) = \frac{\vec{c}\cdot\vec{u}}{|\vec{c}|\cdot|\vec{u}|} = \frac{2u_1 + u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\cdot\sqrt{5}} .$$

Weiter folgt:

$$\begin{aligned}
\sqrt{15}\left(\sqrt{u_1^2+u_2^2}\right) &= 4u_1 + 2u_2 \\
15u_1^2 + 15u_2^2 &= 16u_1^2 + 16u_1u_2 + 4u_2^2 \\
11u_2^2 &= u_1^2 + 16u_1u_2 \text{ mit quadr. Ergänzung folgt:} \\
75u_2^2 &= (u_1 + 8u_2)^2 \\
u_1 + 8u_2 &= \pm 5\sqrt{3}\,u_2 \\
u_1 &= (-8 \pm 5\sqrt{3})\,u_2 .
\end{aligned}$$

(Hinweis: Hier sind die Gleichungen kommentarlos untereinander geschrieben. Man sollte sich bei jeder Gleichung klar machen, ob die Lösungsmenge gleich bleibt, oder ob Lösungen dazukommen können, oder verloren gingen. Dies kann man durch $\Leftrightarrow$ oder $\Rightarrow$ ausdrücken.) Da hier quadriert und die Wurzel gezogen wurde, muß man sich klar machen, daß beide Lösungen auch Lösungen der ursprünglichen Aufgabe sind.

Die entsprechenden Richtungsvektoren sind also: $\vec{u_{(1)}} = \binom{-8+5\sqrt{3}}{1}$ und $\vec{u_{(2)}} = \binom{8+5\sqrt{3}}{-1}$. Daraus erhält man die gesuchten Geraden:

$$g_{(1)}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-8+5\sqrt{3}\\1\end{pmatrix} \text{ und } g_{(2)}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}8+5\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix} .$$

Bemerkung: Es ist $\begin{pmatrix} -8\pm5\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}\pm 2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}\mp\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\pm 1 \end{pmatrix}$. Man kann also auch $\begin{pmatrix} \sqrt{3}\mp\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\pm 1 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektoren wählen.

Alternativlösung ohne Benutzung von Vektorrechnung:
Als Steigung m der Geraden durch $(-2,-2)$ und $(4,1)$ erhält man:

$$m = \frac{1-(-2)}{4-(-2)} = \frac{1}{2}\,.$$

Nach Beispiel 4.24(a) gilt $\tan\alpha = \frac{\hat{m}-m}{1+m\hat{m}}$. Der Schnittwinkel α soll 30° oder 150° sein, also ist $\tan\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Damit folgt weiter:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{m}-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\hat{m}} &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm\sqrt{3}\,\hat{m} \mp \frac{1}{2}\sqrt{3} &= 1+\frac{1}{2}\hat{m} \\ (\pm\sqrt{3}-\frac{1}{2})\,\hat{m} &= 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \hat{m} &= \frac{1\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm\sqrt{3}-\frac{1}{2}}\,. \end{aligned}$$

Aus $\frac{y-1}{x-1} = \hat{m}$ erhält man die Geradengleichungen:

$$g_1 : y = \frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}\,(x-1)+1 \quad \text{und} \quad g_2 : y = \frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-\frac{1}{2}}\,(x-1)+1\,,$$

bzw.

$$g_1 : y = \frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}\,x + \frac{-3+\sqrt{3}}{-1+2\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad g_2 : y = \frac{-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}+\sqrt{3}}\,x + \frac{3+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}\,.$$

(H2) Das Problem führt auf die folgenden vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1\spadesuit + 2\heartsuit &= 1\clubsuit + 2\diamondsuit \\ 2\diamondsuit + 4\spadesuit &= 1\heartsuit + 3\clubsuit \\ 2\diamondsuit + 3\clubsuit &= 5\spadesuit \\ 1\clubsuit + ?\spadesuit &= 2\heartsuit + 3\diamondsuit \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu einem linearen Gleichungssytem:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & -3 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \clubsuit \\ \heartsuit \\ \diamondsuit \\ \spadesuit \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Mit dem Gauß-Algorithmus folgt:

$$
\begin{array}{rrrr|llll}
-1 & 2 & -2 & 1 & 0 & |\cdot(-3) & |\cdot 3 & |\cdot 1 \\
-3 & -1 & 2 & 4 & 0 & |+ & & \\
3 & 0 & 2 & -5 & 0 & & |+ & \\
1 & -2 & -3 & \alpha & 0 & & & |+ \\
\hline
-1 & 2 & -2 & 1 & 0 & & & \\
0 & -7 & 8 & 1 & 0 & |+ & & \\
0 & 6 & -4 & -2 & 0 & |\cdot 1 & & \\
0 & 0 & -5 & 1+\alpha & 0 & & & \\
\hline
-1 & 2 & -2 & 1 & 0 & & & \\
0 & -1 & 4 & -1 & 0 & |\cdot 6 & & \\
0 & 6 & -4 & -2 & 0 & |+ & & \\
0 & 0 & -5 & 1+\alpha & 0 & & & \\
\hline
-1 & 2 & -2 & 1 & 0 & & & \\
0 & -1 & 4 & -1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 20 & -8 & 0 & |:4 & & \\
0 & 0 & -5 & 1+\alpha & 0 & |+ & & \\
\hline
-1 & 2 & -2 & 1 & 0 & & & \\
0 & -1 & 4 & -1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 20 & -8 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & -1+\alpha & 0 & & &
\end{array}
$$

Wegen $(-1+\alpha)\spadesuit = 0$ hat man $\alpha = 1$ (sofern nicht $\spadesuit = 0$), d.h., auf der untersten Waage fehlt noch ein Pik.

Alternativlösung: Es ist auch möglich, aus den ersten drei Gleichungen zunächst die Gewichte von $\clubsuit$, $\heartsuit$, $\diamondsuit$ und $\spadesuit$ zu bestimmen und danach mit Hilfe der vierten Gleichung die fehlende Anzahl α an $\spadesuit$ zu bestimmen.
O.B.d.A habe $\spadesuit$ das Gewicht 1 (diese Normierung ist möglich, da für die vier Gewichte nur drei Bestimmungsgleichungen zur Verfügung stehen). Dann hat man:

$$
\begin{array}{rrrrl}
2\heartsuit & -1\clubsuit & -2\diamondsuit & =-1 & (1) \\
-1\heartsuit & -3\clubsuit & +2\diamondsuit & =-4 & (2) \\
 & 3\clubsuit & +2\diamondsuit & = \;\; 5 & (3) \\
\hline
2\heartsuit & -1\clubsuit & -2\diamondsuit & =-1 & (1) \\
 & -7\clubsuit & +2\diamondsuit & =-9 & (2') = (1) + 2\cdot(2) \\
 & 3\clubsuit & +2\diamondsuit & = \;\; 5 & (3) \\
\hline
2\heartsuit & -1\clubsuit & -2\diamondsuit & =-1 & (1) \\
 & -7\clubsuit & +2\diamondsuit & =-9 & (2') \\
 & & 20\diamondsuit & = \;\; 8 & 3\cdot(2') + 7\cdot(3) \\
\hline
\end{array}
$$

Die Gewichte sind also $\spadesuit = 1$, $\diamondsuit = \frac{2}{5}$, $\clubsuit = \frac{-9-2\diamondsuit}{-7} = \frac{7}{5}$ und $\heartsuit = \frac{-1+1\clubsuit+2\diamondsuit}{2} = \frac{3}{5}$. Daher folgt $\alpha\cdot\spadesuit = \alpha = 2\heartsuit + 3\diamondsuit - 1\clubsuit = 2\cdot\frac{3}{5} + 3\cdot\frac{2}{5} - 1\cdot\frac{7}{5} = 1$ (unabhängig von der Normierung!).

Bemerkungen:

- Betrachtet man nur das lineare Gleichungssystem (1), ohne den Hinweis, daß die Gewichte positiv sind, so ist auch die triviale Lösung, alle Gewichte sind Null, eine Lösung.

- Man kann bei obiger Alternativlösung Pik ein beliebiges positives Gewicht geben. Das Gewicht fällt aus der Rechnung wieder heraus.
- Ist $\alpha = 0$, so hat das Gleichungssystem vollen Rang, also nur die triviale Lösung, daß alle Gewichte Null sind. Damit das homogene Gleichungssystem (1) eine nicht-triviale Lösung hat, muß α so gewählt werden, daß die Matrix nicht vollen Rang hat.

12. Hausübungsblatt

(H1) Die Ebene $\mathcal{E} : x_1 + x_2 + x_3 = 0$ und der Punkt $P = (4, 1, 0)$ sind gegeben.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g, die auf $\mathcal{E}$ senkrecht steht und durch P geht.

(b) Bestimmen Sie den Fußpunkt P_0 des Lotes von P auf $\mathcal{E}$.

(c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene $\mathcal{E}$.

(d) Berechnen Sie den Abstand der Geraden $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ von der Geraden g_1 aus (a).

(H2) Für welche Wahl von α und β hat das folgende lineare Gleichungssystem keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen.

$$\begin{aligned} u + v + \beta w + \alpha z &= 3 \\ v \qquad\quad - \alpha z &= -2 \\ -2u - 2v - \beta w + \alpha z &= -5 \\ \beta w + \alpha z &= 1. \end{aligned}$$

Lösungen

(H1) (a) Die Gerade geht durch P in Richtung des Normalenvektors $\vec{n}$ von $\mathcal{E}$:

$$g : \quad \vec{x} = \overrightarrow{0P} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(b) Der Lotfußpunkt P_0 ist der Schnittpunkt der Ebene $\mathcal{E}$ mit der Gerade g aus a). Es gilt also (da P_0 die Ebenen- und die Geradengleichung erfüllt):

$$x_{P_0} + y_{P_0} + z_{P_0} = 0 \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x_{P_0} \\ y_{P_0} \\ z_{P_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + t_{P_0} \\ 1 + t_{P_0} \\ t_{P_0} \end{pmatrix} .$$

Damit ist $5 + 3t_{P_0} = 0$, also $t_{P_0} = -\frac{5}{3}$, und man erhält $P_0 = \left(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

(c) Die Hessesche Normalenform von $\mathcal{E}$ lautet:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 = 0$$

mit $c = 0$ und dem normierten Normalenvektor: $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Damit gilt nach Satz 9.8(c) für den gesuchten Abstand d:

$$d = |c - \overrightarrow{0P} \cdot \vec{n}| = \left| 0 - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right| = \left| -\frac{5}{\sqrt{3}} \right| = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Alternative: Es ist d die Länge des Vektors $\overrightarrow{P_0P}$:

$$d = |\overrightarrow{P_0P}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \right| = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

(d) Da g_1 und g_2 offensichtlich nicht parallel sind, gilt für ihren Abstand $d(g_1, g_2)$ nach Satz 9.5:

$$d(g_1, g_2) = \frac{\left|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|},$$

wobei $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die Richtungsvektoren und $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Aufpunkte der Geraden sind, also:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 \\ -(6-4) \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

sowie

$$\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Der Abstand ist also:

$$d(g_1, g_2) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{6}} |-2| = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

(H2) Gemäß dem Gauß-Algorithmus läßt sich das gegebene Gleichungssystem äquivalent umformen:

$$\begin{array}{rrrr|rll}
1 & 1 & \beta & \alpha & 3 & |\cdot 2 & \\
0 & 1 & 0 & -\alpha & -2 & & \\
-2 & -2 & -\beta & \alpha & -5 & |+ & \\
0 & 0 & \beta & \alpha & 1 & & \\
\hline
1 & 1 & \beta & \alpha & 3 & & \\
0 & 1 & 0 & -\alpha & -2 & & \\
0 & 0 & \beta & 3\alpha & 1 & |\cdot(-1) & \\
0 & 0 & \beta & \alpha & 1 & |+ & \\
\hline
1 & 1 & \beta & \alpha & 3 & & \\
0 & 1 & 0 & -\alpha & -2 & & \\
0 & 0 & \beta & 3\alpha & 1 & |+ & \\
0 & 0 & 0 & -2\alpha & 0 & |\cdot\left(\frac{3}{2}\right) & |\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\
\hline
1 & 1 & \beta & \alpha & 3 & & \\
0 & 1 & 0 & -\alpha & -2 & & \\
0 & 0 & \beta & 0 & 1 & & (*) \\
0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & & \\
\hline
\end{array}$$

$(*)$ ist gleichbedeutend mit $\beta w = 1$. Es treten folgende Fälle auf:

$\beta = 0$: Dann ist $(*)$ nicht lösbar: $\mathcal{L} = \emptyset$.

$\beta \neq 0,\ \alpha = 0$: Dann ist $\mathrm{Rang}(A) = 3 = \mathrm{Rang}(A, \vec{b})$. Damit ist das System lösbar mit einem freien Parameter, d.h., $z = \lambda \in \mathbb{R}$ ist beliebig. Weiterhin sind $w = \frac{1}{\beta}$, $v = -2$ und $u = 4$. Als Lösungsmenge ergibt sich folglich: $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ \frac{1}{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

$\beta \neq 0,\ \alpha \neq 0$: Dann ist $\mathrm{Rang}(A) = 4 = \mathrm{Rang}(A, \vec{b})$. Damit ist das System eindeutig lösbar mit $z = 0$, $w = \frac{1}{\beta}$, $v = -2$ und $u = 4$. Die Lösungsmenge ist damit: $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ \frac{1}{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

13. Hausübungsblatt

(H1) Die Ebene $\mathcal{E} : x_1 + x_2 + x_3 = 0$ und der Punkt $P = (4, 1, 0)$ sind gegeben.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g, die auf $\mathcal{E}$ senkrecht steht und durch P geht.

(b) Bestimmen Sie den Fußpunkt P_0 des Lotes von P auf $\mathcal{E}$.

(c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene $\mathcal{E}$.

(d) Berechnen Sie den Abstand der Geraden $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ von der Geraden g_1 aus (a).

(H2) Für welche Wahl von α und β hat das folgende lineare Gleichungssystem keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen.

$$\begin{aligned}
u + v + \beta w + \alpha z &= 3 \\
v \qquad\quad - \alpha z &= -2 \\
-2u - 2v - \beta w + \alpha z &= -5 \\
\beta w + \alpha z &= 1.
\end{aligned}$$

Lösungen

(H1) A hat Blockstruktur: $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ mit einer 3×3-Untermatrix

$$A' = A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für derartige Matrizen gilt: $\det A = \det A_1 \cdot \det A_2$.
Kurze Begründung hierfür. Es ist $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_3 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, wobei E_3 die 3×3 Einheitsmatrix ist. Für die Determinante gilt aber $\det \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & E_3 \end{pmatrix} = \det A_1$ bzw. $\det \begin{pmatrix} E_3 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \det A_2$. Mit dem Determinantenmultiplikationssatz folgt $\det A = \det A_1 \det A_2$
Mit $\det A' = 4 + 0 + 0 - 1 - 2 - 0 = 1$ folgt also: $\det A = \det A' \cdot \det A' = 1 \cdot 1 = 1$.
Mit $1 = \det E = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$ folgt weiter: $\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = 1$.
Es ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix}$. Man hat also $(A')^{-1}$ zu bestimmen:

$$\begin{array}{rrr|rrrl|l}
2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & & \text{Vertauschen} \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \text{der ersten mit} \\
1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & & \text{der dritten Zeile} \\
\hline
1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & \vert \cdot 1 & \vert \cdot (-2) \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vert + & \\
2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & & \vert + \\
\hline
1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & & \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & \vert \cdot (-1) & \\
0 & -1 & -3 & 1 & 0 & -2 & \vert \cdot (-1) + & \\
\hline
1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & \vert + & \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & & \vert + \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & \vert \cdot (-2) & \vert \cdot (-2) \\
\hline
1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & & \\
0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & & \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & &
\end{array}$$

Damit folgt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativlösung ohne Rechenregeln für Blockmatrizen:
$\det A$ läßt sich auch durch Entwickeln nach der zweiten Spalte berechnen:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= ((-1) \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2 + 4 - 1) \cdot \det A' = 1 \cdot 1 = 1$$

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung von $\det A$ ist es, A in Dreiecksform zu bringen. Dabei kann man die Blockstruktur von A ausnutzen, da man die obere und die untere Hälfte der Matrix getrennt betrachten und in beiden Teilen dieselben Umformungsschritte anwenden kann:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{ll} |\cdot 1 & \\ |+ & |\cdot 2 \\ & |+ \\ |\cdot 1 & \\ |+ & |\cdot 2 \\ & |+ \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ |\cdot(-1) \\ |+ \\ \\ |\cdot(-1) \\ |+ \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 1$$

In diesem Sinne kann man die Blockstruktur auch für die Invertierung nutzen. Dann hat man für die obere und die untere Teilmatrix jeweils dieselbe Rechnung wie bei der Invertierung von $(A')^{-1}$.

(H2) Es gilt (Entwickeln nach der ersten Spalte):

$$D_n = \det A_n = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ 1 & 1 & -1 & & & & \\ & 1 & 1 & -1 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & 1 & -1 \\ & & & & & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{n}$$

$$= 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & & & & \\ 1 & 1 & -1 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & 1 & -1 \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{n-1} - 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & & & & & \\ 1 & 1 & -1 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & 1 & -1 \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{n-1}$$

$$= \det A_{n-1} - (-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & 1 & -1 \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{n-2}$$

$$= \det A_{n-1} + \det A_{n-2} = D_{n-1} + D_{n-2}\,.$$

Dabei ist $D_1 = \det A_1 = 1$ und $D_2 = \det A_2 = \left|\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right| = 2$. Mit $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$ lassen sich die weiteren Werte berechnen:
$D_3 = 3$, $D_4 = 5$, $D_5 = 8$, $D_6 = 13$, $D_7 = 21$, $D_8 = 34$, $D_9 = 55$, $D_{10} = 89$.
Diese Zahlen, die durch $D_1 = 1$, $D_2 = 2$ und $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$ definiert sind, heißen Fibonacci-Zahlen, vgl. 3. Übungsblatt (P3a).

14. Übungsblatt

P1) Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Warum ist die Matrix A diagonalisierbar?

b) Man gebe eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix S an, so daß

$$D = SAS^{-1}$$

gilt.

c) Man gebe eine orthonormalisierte Matrix S an, so daß $D = SAS^{-1}$ gilt.

P2) Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -6 & 4 & -6 \\ -6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Man gebe eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix S an, so daß $D = SAS^{-1}$ gilt. (Machen Sie nach der Rechnung zur Sicherheit die Probe!)

Lösungen

(P1) (a) Nach Satz 15.13 ist A als symmetrische Matrix reell diagonalisierbar, d.h., es existiert eine Zerlegung $A = S^{-1}DS$ mit einer reellen Diagonalmatrix D und einer reellen, invertierbaren Matrix S.

(b) Die Einträge der Diagonalmatrix sind gerade die Eigenwerte von A, die mit Hilfe des charakteristischen Polynoms berechnet werden:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 8 \\ -4 & 7-\lambda & 4 \\ 8 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)^2(7-\lambda) - 16\cdot 8 - 16\cdot 8 \\ &\quad - (16(1-\lambda) + 64(7-\lambda) + 16(1-\lambda)) \\ &= (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(7-\lambda) - 256 - (32 - 32\lambda + 448 - 64\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 7\lambda^2 - 14\lambda + 7 - 736 + 96\lambda \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 81\lambda - 729\,.\end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind gerade die Nullstellen dieses Polynoms $-\lambda^3+9\lambda^2+81\lambda-729 = -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 9^2\lambda - 9^3 = -(\lambda^2 - 9^2)(\lambda - 9) = -(\lambda-9)^2(\lambda+9)$. Daher lauten die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 9, \lambda_3 = -9$. Die Diagonalmatrix lautet also:

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix S setzt sich aus den Eigenvektoren von A zusammen. Zur Berechnung dieser löst man statt $\vec{x}\cdot(A - \lambda E) = \vec{0}$ mit $\vec{x}$ als Zeilenvektor das transponierte System $(A-\lambda E)^\top \cdot \vec{x}^\top = \vec{0}^\top$. Dabei ist allerdings $(A - \lambda E)^\top = (A - \lambda E)$, da A symmetrisch ist.
Für den Eigenwert $\lambda_3 = -9$ ist also zu lösen:

$$(A+9E)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 \\ -4 & 16 & 4 \\ 8 & 4 & 10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Durch Addition der letzten Zeile zum Doppelten der zweiten Zeile erh ält man die Gleichung: $0x_1 + 36x_2 + 18x_3 = 0$. Wähle also etwa $x_2 = 1$ und $x_3 = -2$. Dann ergibt sich aus der ersten Zeile $x_1 = 2$. Ein zu $\lambda_3 = -9$ gehörender Eigenvektor

lautet also $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, -2)$.
Für den doppelten Eigenwert $\lambda = 9$ sind zwei linear unabhängige Eigenvektoren mit:

$$(A - 9E) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 8 \\ -4 & -2 & 4 \\ 8 & 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

zu bestimmen. Die Zeilen dieses Systems sind paarweise linear abh ängig, wähle also für beide Eigenvektoren etwa x_1 und x_2 und bestimme daraus x_3. Eine Lösungsbasis (für das nicht-transponierte System) ist beispielsweise $\{(1,\ 2,\ 2),\ (-2,\ 2,\ -1)\}$.
Damit lautet die gesuchte Matrix:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

(Dabei muß der Eigenvektor zu -9 in der letzten Zeile stehen, vgl. Diagonalmatrix.)

(c) Hier ist S schon orthogonal (wegen $(1,\ 2,\ 2) \cdot (-2,\ 2,\ -1) = 0$); daher sind die Vektoren nur noch zu normieren ($\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$):

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Probe ($S^{-1} = S^\top$, da S orthonormal ist):

$$\begin{aligned} SAS^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -18 & -18 \\ 18 & 18 & -9 \\ 18 & -9 & 18 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Anmerkung:

Falls man die zwei Eigenvektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ zu $\lambda = 9$ nicht orthogonal gewählt hat, muß man sie orthogonalisieren:
Bei symmetrischen Matrizen sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten immer orthogonal zueinander. Man muß also nur noch bei den Eigenvektoren, die zu einem mehrfachen Eigenwert geh ören, aufpassen.
$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|}$, $\vec{e}_2 = \vec{a}_2 - (\vec{a}_2 \cdot \vec{e}_1)\, \vec{e}_1$ und anschließend normalisieren.

Man kann den dritten Eigenvektor auch als Kreuzprodukt der anderen beiden erhalten, allerdings klappt der Trick nat ürlich nur in Dimension 3. Hätte man also z.B. $\vec{a}_1 = (1, 0, 1)$ gewählt, so würde man

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

als Eigenvektor zu $\lambda = 9$ erhalten.
Die Basis der Eigenvektoren bildet hier also ein Rechtssystem.
Nach Normalisierung lautet die orthonormale Matrix S dann also

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}.$$

Die Inverse hierzu lautet:

$$S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}.$$

Und es ist erneut $SAS^{-1} = D$.
Oder hätte man z.B. $\vec{a}_1 = (1, 0, 1)$ und $\vec{a}_2 = (0, 2, 1)$ als Eigenvektoren zu $\lambda = 9$ gewählt, so kann man diese wie folgt orthonormalisieren:
Die Vektoren sind auf jeden Fall senkrecht zu dem Eigenvektor $(2, 1, -2)$, da bei symmetrischen Matrizen Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten immer senkrecht sind. Man normalisiert also $\vec{a}_1$ zu $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ und berechnet dann

$$\vec{e}_2 = \vec{a}_2 - (\vec{a}_2 \cdot \vec{e}_1)\,\vec{e}_1 = (0, 2, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) = (-\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}).$$

Normalisierung ergibt: $\frac{1}{\sqrt{18}}(-1, 4, 1)$. Im Gegensatz zu oben bilden diese orthonormalsierten Vektoren ein Linkssystem!

(P2) Man geht wie in (P1) vor und bestimmt zun ächst die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

(Hinweis: auch bei der Berechnung der Eigenwerte, d.h. bei der Berechnung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms, transponiert man zun ächst die Matrix: $\vec{x}A = \lambda\vec{x} \Longleftrightarrow (A^T - \lambda E)\vec{x}^T = \vec{0}^T$.

Allerdings sind die charakteristischen Polynome und damit auch die Eigenwerte von der Matrix A und ihrer transponieretn Matrix A^T die gleichen. Die Eigenvektoren sind aber verschieden!)

$$\chi_A(\lambda) = \det(A^\top - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$
$$\begin{aligned}
&= (5-\lambda)\cdot(4-\lambda)\cdot(-4-\lambda) - 36 - 36 + 12\,(5-\lambda) + 18\,(4-\lambda) - 6\,(-4-\lambda) \\
&= (20 - 5\lambda - 4\lambda + \lambda^2)\cdot(-4-\lambda) - 72 + 60 - 12\lambda + 72 - 18\lambda + 24 + 6\lambda \\
&= (-80 + 36\lambda - 4\lambda^2 - 20\lambda + 9\lambda^2 - \lambda^3) - 24\lambda + 84 \\
&= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4\,.
\end{aligned}$$

Man rät die Nullstelle $\lambda_1 = 1$. Mittels Polynomdivision findet man dann weiter:

$$\begin{array}{l}
(-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4) : (\lambda - 1) = -\lambda^2 + 4\lambda - 4 \\
\underline{-\lambda^3 + \ \lambda^2} \\
\qquad 4\lambda^2 - 8\lambda \\
\qquad \underline{4\lambda^2 - 4\lambda} \\
\qquad\qquad -4\lambda + 4 \\
\qquad\qquad \underline{-4\lambda + 4} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)\,(\lambda - 2)^2$ hat also die einfache Nullstelle $\lambda_1 = 1$ und die doppelte Nullstelle $\lambda_{2,3} = 2$.
Zur Berechnung der Eigenvektoren löst man wie in (P1) das transponierte System $(A^\top - \lambda\,E)\,\vec{x}^\top = \vec{0}^\top$. Für $\lambda_1 = 1$ erhält man:

$$(A^\top - E)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}\,.$$

Addiert man das Dreifache der zweiten Zeile zur dritten Zeile, so folgt: $3x_2 + x_3 = 0$.
Man kann also etwa $x_2 = -1$, $x_3 = 3$ wählen. Dann folgt $x_1 = 3$.
Für $\lambda_{2,3} = 2$ ist das folgende System zu lösen:

$$(A^\top - 2\,E)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}\,.$$

Man wähle also $\vec{x}$ so, daß $-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$ erfüllt ist. Zwei linear unabhängige Eigenvektoren sind beispielsweise $\vec{b}_2 = (2,\,1,\,0)$ und $\vec{b}_3 = (2,\,0,\,1)$.
Die gesuchten Matrizen sind somit:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

S ist invertierbar, da die Zeilen von S linear unabhängig sind.

Die Inverse lautet

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} .$$

Da es aber im allgemeinen Mühe macht, die Inverse zu berechnen, kann man zur Probe statt $D = SAS^{-1}$ auch $SA = DS$ verwenden:

$$SA = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -6 & 4 & -6 \\ -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und}$$

$$DS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$