6. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{1}{3}n(n^2-1).$$

7. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

8. (a) Zeigen Sie $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, falls $x > 0$, $y > 0$. (Hinweis: man kann an geeigneter Stelle die binomische Formel verwenden).
   (b) Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positive Zahlen. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:
$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

9. (a) Finden Sie eine natürliche Zahl t für die gilt: $2^{2t} \leq t!$. Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq t$: $2^{2n} \leq n!$.
   (b) Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$: $3^n > n^3$. (Was passiert, wenn Sie versuchen, dies bereits für $n \geq 1$ zu beweisen?)

10. Beweisen Sie für die durch
$$a_0 = 3,\ a_n = 3 - \frac{2}{a_{n-1}}, \qquad n \geq 1$$
rekursiv definierte Folge $(a_1, a_2, \ldots)$ die folgende explizite Darstellung:
$$a_n = 2 + \frac{1}{2^{n+1}-1}.$$

Bemerkungen:
1) Achten Sie auf eine sorgfältige Struktur der Induktion! 2) In den obigen Beispielen ist die Behauptung jeweils angegeben. Es ist eine gute Übung (aber durchaus etwas schwerer), die Behauptung erst einmal zu „finden“ wenn sie nicht angegeben ist.

Zum Beispiel: in Aufgabe 6) muss die Formel für $\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$ ein Polynom vom Grad drei sein. Der Koeffizient von n^3 muss ein Drittel sein. (Das kann man z.B. mit $\sum \ldots \approx \int_0^n x^2\,dx = \frac{1}{3}n^3$ sehen.) Dann kann man schrittweise für kleine Werte von $n = 0, 1, 2$ das genaue Polynom rekonstruieren. (z.B. durch ein lineares Gleichungssystem).

Oder in Aufgabe 10) rechnet man die ersten Folgenglieder aus, und rät dann, dass Terme der Form $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{15}$ entsprechend verallgemeinert werden.

Probieren Sie ruhig, durch das Berechnen der ersten Terme in Aufgaben 6,7 und 10 den richtigen Ausdruck zu raten.