28. Für die nachstehenden Funktionen ist zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta_\epsilon > 0$ so zu bestimmen, dass aus $|x - x_0| < \delta_\epsilon$ die Beziehung $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ folgt.

$$(a)\ f(x) = x^3, \quad D(f) = \mathbb{R},$$

$$(b)\ f(x) = \sqrt{x}, \quad D(f) = [0, \infty),$$

29. Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind:

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} -x & \text{falls } x < 0 \text{ oder } x > 1 \\ x^2 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(Skizze!)}$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{falls } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(Skizze!)}$$

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit in $[-\pi, \pi]$:

$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \qquad \text{(Skizze!)}$$

$$(d) \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \qquad \text{(Skizze!)}$$

30. Beweisen Sie: Ist $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \xi$. Der Punkt ξ heißt *Fixpunkt* der Funktion f. (Hinweis: betrachten Sie die Funktion $g(x) = f(x) - x$)

Tipp zu 28b) Betrachten Sie $x_0 \neq 0$ und $x_0 = 0$ getrennt.

30) ist nicht ganz leicht. Tipp: Nachdenken, ein paar Zeichnungen machen, und wieder nachdenken.

Viel Erfolg beim Test!