31. Es seien zwei Funktionen definiert durch $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

    (a) Zeigen Sie, dass die Potenzreihe von g für alle $x \in \mathbb{C}$ konvergiert, d.h., dass die Funktion für $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert ist.

    (b) Beweisen Sie, dass $f(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$ und $g(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$ gilt.

    (c) Beweisen Sie, dass $g^2(x) - f^2(x) = 1$ gilt.

    (d) Weisen Sie $g(x+y) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$ nach.

    (e) Benutzen Sie die Potenzreihe, um $f(ix)$ durch $\sin(x)$ auszudrücken.

    (f) Finden Sie analog einen Ausdruck für $g(ix)$.

32. Es sei $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Berechnen Sie die ersten Koeffizienten der Potenzreihe der Tangensfunktion (entwickelt um $x_0 = 0$), bis zum Koeffizienten von x^7.
    Anleitung: Es sei $\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Wenn die a_n und b_n bekannt sind, kann man nacheinander $c_0, c_1, \ldots$ ausrechnen.

33. Drücken Sie $\sin(5s)$ nur durch $\sin(s)$ (und Potenzen hiervon) aus.