TU Graz

C. Elsholtz

Analysis T1
WS 2010, 16.11.2010, 1. Test

Name, Vorname	Matr.nummer	Fachrichtung

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$	A
Max. Punkte	5	3	6	6	20	
bearbeitet ? bitte ankreuzen!						
erreichte Punkte						

Es wird nicht nur das Ergebnis, sondern insbesondere auch der Rechenweg bewertet. Begründen Sie Ihre Schritte ausreichend.
Wenn Sie bei einer Aufgabe nicht weiterkommen, z.B. weil bereits ein Rechenfehler vorliegt, beschreiben Sie bitte möglichst genau das prinzipielle Vorgehen, mit dem Sie die Aufgabe angehen wollten.

BEGINNEN SIE ALLE AUFGABEN AUF JEWEILS EINEM NEUEN BLATT UND SCHREIBEN SIE AUF JEDES BLATT IHREN NAMEN UND MATRIKELNUMMER!!!

BEGINNEN SIE ALLE AUFGABEN AUF JEWEILS EINEM NEUEN BLATT UND SCHREIBEN SIE AUF JEDES BLATT IHREN NAMEN UND MATRIKELNUMMER!!!

1. [5 Punkte] Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:
$$\sum_{k=0}^{n}(3k-2)^2 = 3n^3 - \frac{3}{2}n^2 - \frac{n}{2} + 4.$$

2. [3 Punkte] Beweisen Sie für eine komplexe Zahl $z = a + bi$:
a) $z + \overline{z}$ ist eine reelle Zahl.
b) $|z|^2 = |z^2|$.

3. [3+3=6 Punkte] Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz:
$$\text{a)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n^{4n}}, \qquad\qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}.$$

4. [1+5 =6 Punkte]

a) Untersuchen Sie, ob $\lim_{n\to\infty} \frac{(-n)^2+(-1)^n}{3n^2+5n-2}$ existiert, und wenn ja, berechnen Sie den Grenzwert.

b) Es sei c eine reelle Konstante, mit $0 \leq c \leq 1$. Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ sei eine Folge definiert durch
$$b_n = \sqrt[3]{n + n^c} - \sqrt[3]{n}.$$

Untersuchen Sie, ob $\lim_{n\to\infty} b_n$ existiert, und wenn ja, berechnen Sie den Grenzwert.

Anleitung:
1) Sie können die Formel $x - y = \frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$ verwenden, um einen geeigneten Ausdruck für b_n zu berechnen.
2) Suchen Sie zwei Hilfsfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $a_n \leq b_n \leq c_n$, deren Grenzwerte Sie berechnen können.
3) Unterscheiden Sie die drei Fälle
a) $c < \frac{2}{3}$, b) $c = \frac{2}{3}$ und c) $c > \frac{2}{3}$.

Sie können $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n^\alpha})^\beta = 1$ (für positive reelle Zahlen α, β) ohne Begründung verwenden.

Viel Erfolg!

TU Graz

C. Elsholtz

Analysis T1
WS 2010, 16.11.2010, 1. Test

Name, Vorname	Matr.nummer	Fachrichtung

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$	B
Max. Punkte	3	5	6	6	20	
bearbeitet ? bitte ankreuzen!						
erreichte Punkte						

Es wird nicht nur das Ergebnis, sondern insbesondere auch der Rechenweg bewertet. Begründen Sie Ihre Schritte ausreichend.
Wenn Sie bei einer Aufgabe nicht weiterkommen, z.B. weil bereits ein Rechenfehler vorliegt, beschreiben Sie bitte möglichst genau das prinzipielle Vorgehen, mit dem Sie die Aufgabe angehen wollten.

BEGINNEN SIE ALLE AUFGABEN AUF JEWEILS EINEM NEUEN BLATT UND SCHREIBEN SIE AUF JEDES BLATT IHREN NAMEN UND MATRIKELNUMMER!!!

BEGINNEN SIE ALLE AUFGABEN AUF JEWEILS EINEN NEUEN BLATT UND SCHREIBEN SIE AUF JEDES BLATT IHREN NAMEN UND MATRIKELNUMMER!!!

1. [3 Punkte]

   Beweisen Sie für eine komplexe Zahl $z = a + bi$.
   a) $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
   b) $z\overline{z}$ ist eine reelle Zahl.

2. [5 Punkte] Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} (3k+2)^2 = 3n^3 + \frac{21}{2}n^2 + \frac{23n}{2}.$$

3. [3+3=6 Punkte] Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n+2}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{3n}}{\binom{3n}{n}}.$$

4. [1+5=6 Punkte]

   a) Untersuchen Sie, ob $\lim_{n\to\infty} \frac{(-n)^3+(-n)^2}{n^3+5n-2}$ existiert, und wenn ja, berechnen Sie den Grenzwert.

   b) Es sei c eine reelle Konstante, mit $0 \leq c \leq 1$. Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ sei eine Folge definiert durch

$$b_n = \sqrt{n} - \sqrt{n - n^c}.$$

   Untersuchen Sie, ob $\lim_{n\to\infty} b_n$ existiert, und wenn ja, berechnen Sie den Grenzwert.

   Anleitung:
   1) Sie können die Formel $x - y = \frac{x^2-y^2}{x+y}$ verwenden, um einen geeigneten Ausdruck für b_n zu berechnen.
   2) Suchen Sie zwei Hilfsfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $a_n \leq b_n \leq c_n$, deren Grenzwerte Sie berechnen können.
   3) Unterscheiden Sie die drei Fälle
   a) $c = \frac{1}{2}$, b) $c > \frac{1}{2}$ und c) $c < \frac{1}{2}$.

   Sie können $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n^\alpha})^\beta = 1$ (für positive reelle Zahlen α, β) ohne Begründung verwenden.

Viel Erfolg!