

Mathematik I für ChemikerInnen WS 2017/18

2. Übungsblatt

7. (a) Es gilt $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$. Rechnen Sie dies nach, indem Sie für die Binomialkoeffizienten jeweils den Ausdruck als Bruch einsetzen, also $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, usw.

(b) Weisen Sie die folgende Identität für den Binomialkoeffizienten nach

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{n+1} \binom{n+1}{k}.$$

8. Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\frac{2n \cdot (n-2)!}{(n-1)!} - \frac{2}{n-1} =$$

9. (Wie schnell wächst $n!$?)

(a) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt: $2^n \leq n! \leq n^n$ (mit Begründung).
Für welche geraden $n \in \mathbb{N}$ gilt: $6^n \leq n! \leq (0.8n)^n$ (mit Begründung).

(b) Eine sehr gute Näherungsformel (für große n) ist die Stirlingsche Formel: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Hierbei ist $e = 2,7181\dots$ die Basis des natürlichen Logarithmus, und $\pi = 3,1415\dots$ die Kreiszahl). Tabellieren Sie (mit Taschenrechner oder ähnlich) für $n = 2, 4, 6, 10, 20, 50$ (und je nach technischen Möglichkeiten auch mehr), die Werte und die Näherung, und vergleichen Sie, wie der Quotient ($n!$ /Näherung) gegen 1 geht.

10. (a) Ein Mann steigt auf einer Leiter auf und ab. Zu Beginn steht er auf einer bestimmten Sprosse. Nach 10 Schritten befindet er sich wieder auf der Ausgangssprosse. Auf wieviele verschiedene Arten kann der Mann dies ausgeführt haben? (Die Leiter ist immer ausreichend groß, d.h. der Mann hat nach oben und unten immer genug Platz.)

Geben Sie weiters eine Formel an, die die Anzahl dieser Möglichkeiten für n Schritte ausdrückt.

(b) Eine Frau steigt auf einer Leiter auf und ab. Zu Beginn steht sie auf dem Boden, d.h. auf der nullten Sprosse. Nach 10 Schritten befindet sie sich wieder auf der Ausgangssprosse. Auf wieviele verschiedene Arten kann sie dies ausgeführt haben? (Die Leiter ist nach oben immer ausreichend groß, aber sie kann nie unterhalb der nullten Sprosse sein.)

Wenn Sie dies Ergebnis für $n = 2, 4, 6, 8, 10$ Schritte betrachten, sehen Sie vielleicht, einen Zusammenhang zur Aufgabe a)?

(Hinweis: Sie können in einem Gitter (kariertes Papier) bei jedem Schritt die Anzahl der Möglichkeiten, dorthin zu kommen schreiben, und geeignet addieren. Zur Kontrolle: die Antwort nach 6 (statt 10) Schritten ist 5.)