Mathematik I für ChemikerInnen WS 2017/18
3. Übungsblatt

11. (a) Gegeben sind drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

    (b) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

12. (a) Berechnen Sie das Volumen der durch die Punkte $P_1 = (1,0,0), P_2 = (0,1,0), P_3 = (0,0,1), P_4 = (0,0,0)$ definierten Pyramide, einerseits elementargeometrisch, andererseits mit Hilfe des Spatproduktes.

    (b) Berechnen Sie das Volumen eines regulären Tetraeders mit Seitenlänge a. (Hinweis: In Vorlesung wurde entwickelt, dass $P_1 = (1,1,1), P_2 = (1,-1,-1), P_3 = (-1,1,-1), P_4 = (-1,-1,1)$ oder $Q_1 = (0,0,1), Q_2 = (0,\sqrt{8}/3,-1/3), Q_3 = (\sqrt{2/3},-\sqrt{2}/3,-1/3), Q_4 = (-\sqrt{2/3},-\sqrt{2}/3,-1/3)$ explizite Koordinaten regulärer Tetraeder sind).

13. Geben Sie eine Parameterform der Ebene $4x - y + 19z = 10$ an. Berechnen Sie den Abstand dieser Ebene zum Punkt $P = (-2,5,0)$. Welcher Punkt der Ebene ist der Punkt mit minimalem Abstand zu P?
(Hinweis: Mit Brüchen rechnen, nicht mit Dezimalzahlen. Wenn bei Ihnen die Zahl 378 vorkommt, ist das ein gutes Zeichen).

14. Die Grundfläche eines Tetraeders ist durch das Dreieck ABC mit $A = (-4,9,1), B = (3,3,-1)$ und $C = (6,-1,-3)$ gegeben. Die Spitze des Tetraeders ist der Schnittpunkt der beiden Geraden
$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

    (a) Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze S des Tetraeders.

    (b) Berechnen Sie die Koordinaten des Fußpunktes der Höhe F.

    (c) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders.

    (d) Geben Sie die Koordinaten des Punktes S' an, den man durch Spiegelung von S an der Grundfläche enthält.

    (Hinweis: die Koordinaten sind alle ganzzahlig.)

15. Eine Menge H von Punkten in der euklidischen Ebene, sodass für alle Punkte $X \in H$ der Betrag der Differenz der Abstände zu zwei festen Punkten F_1 und F_2 (Brennpunkte) konstant ist, heißt Hyperbel. Für alle Punkte $x \in H$ gilt also
$$|\overrightarrow{XF_1}| - |\overrightarrow{XF_2}| = \pm 2a.$$
Leiten Sie aus dieser Definition ab, dass alle Punkte $X = (x,y)$ auf der Hyperbel mit den Brennpunkten $F_1 = (-e,0)$ und $F_2 = (e,0)$ der Gleichung
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
genügen, wobei $b = \sqrt{e^2 - a^2}$.

Zum Knobeln: Ein Mathematiker bezieht eine neue Wohnung. Paßt sein reguläres Tetraeder der Seitenlänge 1,5m durch die Tür, die $110cm$ breit ist?