Mathematik I für ChemikerInnen WS 2017/18
8. Übungsblatt

34. Das Kohlenstoffisotop C^{14} ist radioaktiv und zerfällt nach dem Gesetz $f(t) = f(0) \cdot e^{-\lambda t}$, wobei t die Zeit in Jahren ist. Man weiß, dass nach 5760 Jahren nur mehr die Hälfte der Ausgangssubstanz vorhanden ist (Halbwertszeit). Wie groß ist λ?

35. Finden Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichung:

$$\ln(e^x + 1) + \ln\left(e^x - \frac{1}{2}\right) = x.$$

(Hinweise: 1) durch welche Operation können Sie die Logarithmen wegbekommen? Wenden Sie diese Operation auf die ganze Gleichung an. 2) Substituieren Sie $t = e^x$ um alles zu vereinfachen, und nach t auzulösen. Am Ende wieder zurücksubstituieren.)

36. Es ist $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ und $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Zeigen Sie folgende Identitäten für $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$,

(b) $\sinh(x + y) = \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$,

(c) $\cosh(2x) = 2\cosh(x)^2 - 1$.

Die folgenden Aufgaben sollen Ihnen ein intuitives Gefühl vermitteln, wie es kommen kann, dass eine unendliche Summe, siehe Definition der Exponentialfunktion, in manchen Situationen einen endlichen Wert annehmen kann. Mit den Mitteln der Vorlesung können Sie das folgende nicht ganz exakt lösen, sollen aber beobachten, was passiert.

37. Es ist $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{3^n}$. Berechnen Sie die ersten Werte von s_k numerisch mit dem Taschenrechner und als exakte Brüche. Finden Sie eine Formel für s_k von der Form $s_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{???}$. Folgern Sie, dass für wachsendes k die Folge $s_1, s_2, \ldots$ beliebig nahe an $\frac{1}{2}$ kommt, aber nie größer als $\frac{1}{2}$ wird.

38. (a) Wie kann man (analog zum Skript) begründen, dass $\exp(5) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$ einen endlichen Wert annimmt, d.h. dass die unendliche Summe nicht unbeschränkt wächst?

(b) Berechnen Sie mit dem Taschenrechner $(1-\frac{1}{n})^n$ für wachsendes n ($n = 1, 2, 3, 10, 100, 1000\ldots$). Untersuchen Sie, was das Ergebnis mit $e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ zu tun hat.