Mathematatik I für ChemikerInnen WS 2019/20
4. Übungsblatt (Aufgaben 15-17)

15. (a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt: $z^2 = -1$?
    (b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt: $z^2 = i$?
    (c) Für welche Werte $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ gilt: $\frac{z-1}{2} = \frac{1+2i}{z+1}$

Lösung: (a) Es ist klar, dass $-i, i$ Lösungen sind. Gibt es weitere Lösungen? Sei $z = a + bi$, mit rellen a, b. Dann ist $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ und dies soll $= -1$ sein. Der Realteil und Imaginärteil muss jeweils übereinstimmen, d.h.: $a^2 - b^2 = -1$ und $2ab = 0$. Aus $2ab$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$ (oder beides).
Fall 1: $b = 0$, dann ist $a^2 = -1$, das ist aber im Reellen nicht lösbar.
Fall 2: sei $a = 0$, dann ist $-b^2 = -1$, also $b = \pm 1$, also $z = i$ oder $z = -i$. Es gibt also genau diese 2 Lösungen.

(b) Mit dem gleichen Ansatz folgt mit $z = a + bi$ eingesetzt in $z^2 = i$, dass $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ und $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$. (Beide Werte haben Betrag 1, liegen bei 45^o bzw. gegenüber bei 225^o.)

(c) $\frac{z-1}{2} = \frac{1+2i}{z+1} \iff z^2 - 1 = 2 + 4i \iff z^2 = 3 + 4i$
Ansatz $z = a + bi$: $(a + bi)^2 = 3 + 4i \iff (a^2 - b^2) + 2abi = 3 + 4i$
Koeffizientenvergleich: $a^2 - b^2 = 3$ und $2ab = 4$.
$a = \frac{2}{b}$ in die erste Gleichung eingesetzt: $\frac{4}{b^2} - b^2 = 3 \iff 4 - b^4 = 3b^2$
Substitution $b^2 =: u$: $u^2 + 3u - 4 = 0 \Longrightarrow u_1 = 1, u_2 = -4$
Rücksubstitution: $b_1 = 1, b_2 = -1$
Einsetzen in $a = \frac{2}{b}$: $a_1 = 2, a_2 = -2$
Lösungsmenge $\mathcal{L} = \{2 + i, -2 - i\}$

16. a) Berechnen Sie $i, i^2, i^3, \ldots, i^{10}$, und daraus dann i^{2017}.
    b) Es sei $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$. Berechnen Sie $z^2, z^3, z^4, z^5, z^6, z^7, z^8$ und zeichne Sie diese (so gut es geht), in die komplexe Zahlenebene.
    c) Berechnen Sie $(1 + i)^4$.

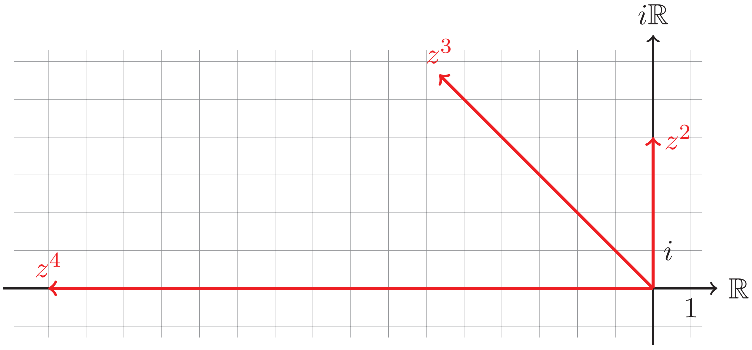
Lösung: (a) $i = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1$
Analog können die weiteren Potenzen berechnet werden: $i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, i^8 = 1, i^9 = i, i^{10} = -1$. Allgemein:

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \equiv 0 \mod 4 \\ i & \text{für } n \equiv 1 \mod 4 \\ -1 & \text{für } n \equiv 2 \mod 4 \\ -i & \text{für } n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

$2017 \equiv 1 \mod 4 \Longrightarrow i^{2017} = i$

(b) $z^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{2}i + 2i^2 = 4i$
$z^3 = z^2 \cdot z = 4i \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2}i) = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$
$z^4 = \left(z^2\right)^2 = (4i)^2 = -16$
$z^5 = z^4 \cdot z = -16\sqrt{2} - 16\sqrt{2}i$
$z^6 = z^4 \cdot z^2 = -16 \cdot 4i = -64i$

$z^7 = z^6 \cdot z = 64\sqrt{2} - 64\sqrt{2}i$
$z^8 = \left(z^4\right)^2 = (-16)^2 = 256$



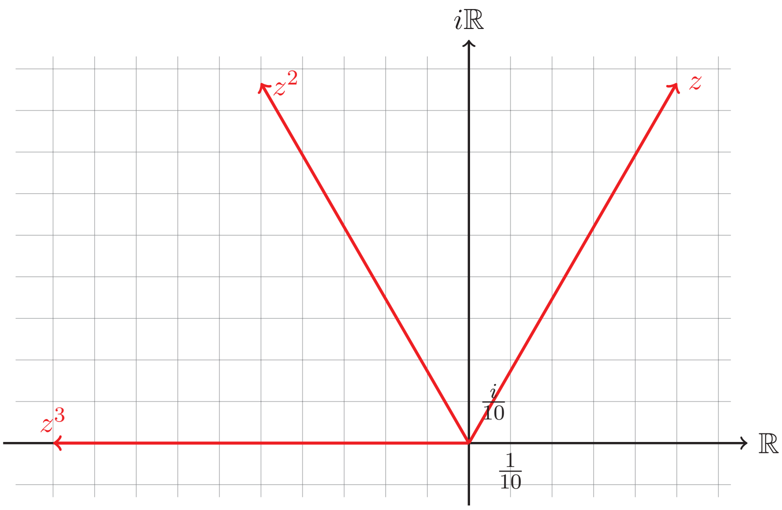
(c) $(1+i)^4 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} \cdot i + \binom{4}{2} i^2 + \binom{4}{3} i^3 + \binom{4}{4} i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4$

17. (a) Es sei $z = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\,i)$. Berechnen Sie z^2, z^3 und zeichnen Sie z, z^2, z^3 in der komplexen Ebene.

(b) Finden Sie alle komplexen Nullstellen der Gleichung

$$z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = 0$$

Lösung: (a) $z^2 = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{3}i\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{3}i - 3) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
$z^3 = \frac{1}{8}\left(1+\sqrt{3}i\right)^3 = \frac{1}{8}(1 + 3\sqrt{3}i - 9 - 3\sqrt{3}i) = -1$



(b) Erraten der ersten Nullstelle $z_1 = -2$ und Polynomdivision ergibt: $(z^3 + 3z^2 + 3z + 2) = (z+2)(z^2 + z + 1)$

Kleine Lösungsformel: $z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

Lösungsmenge: $\mathcal{L} = \left\{-2, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$