Einiges aus der Logik

(Quelle: "Mathematik 0" von Clemens Fuchs)

Die Logik untersucht die Gültigkeit von Argumenten. Als Begründer kann Aristoteles (384-322 v.Chr.) angesehen werden.

Motivation:

- Logischer Aufbau von Computerprogrammen
- Analyse logischer Schaltkreise
- Grundlage von Expertensystemen
- Grundlage mathematischer (logischer) Schlüsse

Einige Grundbegriffe:

Aussage: Sätze, die entweder *wahr* (w) oder *falsch* (f) sind.
z.B.: "$5 + 5 = 22$", "Es gibt keine größte Primzahl", "In Tirol ist es schön".
Axiom: Aussage, an die man so fest glaubt, dass man es nicht für nötig hält, sie zu beweisen.
Aussageform: logischer Ausdruck, dessen Variablen durch beliebige Aussagen ersetzt werden können.
Tautologie: immer wahre Aussageform.
z.B.: "Entweder es regnet, oder es regnet nicht."

Aus einer oder mehreren Aussagen können neue gewonnen werden:

Negation: $\neg A$ Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Konjunktion: $A \wedge B$ Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Disjunktion: $A \vee B$ Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Subjunktion: $A \rightarrow B$ Wahrheitstafel:

A	B	$A \rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Bijunktion: $A \leftrightarrow B$ Wahrheitstafel:

A	B	$A \leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Eine **Implikation** ($P \Rightarrow Q$) liegt dann vor, wenn $P \rightarrow Q$ eine Tautologie ist.
Eine **Äquivalenz** ($P \Leftrightarrow Q$) liegt dann vor, wenn $P \leftrightarrow Q$ eine Tautologie ist.

Beispiele: Aussage A : "5 ist eine ungerade Zahl" , Aussage B : "4 ist eine Primzahl"

$\neg A$: "5 ist keine ungerade Zahl"
$A \wedge (\neg B)$: "5 ist eine ungerade Zahl und 4 ist keine Primzahl"
$A \rightarrow B$: "Wenn 5 eine ungerade Zahl ist, dann ist 4 eine Primzahl"
$A \leftrightarrow B$: "5 ist genau dann eine ungerade Zahl, wenn 4 eine Primzahl ist"
$(A \wedge \neg A) \rightarrow B$ ist immer wahr, also eine Tautologie, somit $(A \wedge \neg A) \Rightarrow B$.
$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$ ist immer wahr, also eine Tautologie, somit $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$.

Ein **logischer Schluß (Argument)** ist die Behauptung, daß die Aussagen $P_1, P_2, ..., P_n$ (genannt *Prämissen, Voraussetzungen*) eine neue Aussage Q (genannt *Konklusion, Schluß*) zur Folge haben. Ein logischer Schluß heißt *richtig, gültig*, wenn Q wahr ist, sobald alle Voraussetzungen wahr sind, andernfalls *Trugschluß* .
Man schreibt: $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \Rightarrow Q$.

Schlußregeln :

Abtrennungsregel (modus ponens) : $A \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow B$

Widerlegungsregel (modus tollens) : $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

Kontraposition (indirekter Beweis) : $(A \to B) \Rightarrow (\neg B \to \neg A)$

Kettenschluß: $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$

Reductio ad absurdum (Beweis durch Widerspruch) : $(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Rightarrow \neg A$

Fallunterscheidung : $(A \vee B) \wedge (A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow C$

Beispiele:

- Heute ist es schön. An jedem schönen Tag bin ich froh. $\Rightarrow$ Heute bin ich froh.
- An jedem schönen Tag bin ich froh. Heute bin ich nicht froh. $\Rightarrow$ Heute ist es nicht schön.

Viele Sätze in der Mathematik haben die Form $A \Rightarrow B$.

B heißt dabei **notwendige Bedingung** für A .

A heißt **hinreichende Bedingung** für B .

Weitere wichtige logische Äquivalenzen :

$A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$, $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$ (Regeln von de Morgan)

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$(A \to B) \Leftrightarrow (\neg B) \to (\neg A) \Leftrightarrow (\neg A) \vee B$

$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

In Aussagen kommen oft Ausdrücke der Form "**Für alle ...**" oder "**Es gibt mindestens ein ...**" vor. Dazu verwendet man den *Allquantor:* $\forall\, x : A(x)$ bzw. den *Existenzquantor:* $\exists\, x : A(x)$.

Man beachte, daß die Reihenfolge der Quantoren wichtig ist, und daß bei der Verneinung einer Aussage die beiden Quantoren gegenseitig vertauscht werden.

Beispiele:

- $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \exists\, k \in \mathbb{N} \ :\ k > n$ ist **nicht** gleich $\exists\, k \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ :\ k > n$
- $\neg(\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \exists\, k \in \mathbb{N} \ :\ n = k^2) \ = \ (\exists\, n \in \mathbb{N}\ \ \forall\, k \in \mathbb{N} \ :\ n \neq k^2)$