Flächen zweiter Ordnung

Definition:
Eine Fläche zweiter Ordnung ist die Gesamtheit aller Punkte, deren Ortsvektoren $\vec{x}$ der Gleichung

$$\boxed{\vec{x}^T A\, \vec{x} + \vec{p}^T \vec{x} + f = 0}$$

genügen, wobei

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Ausführliche Schreibweise:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + f = 0$$

Da die Matrix A symmetrisch ist, gibt es bekanntlich eine orthogonale Matrix B, die A auf eine Diagonalmatrix transformiert:

$$B^T A\, B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bezeichnen die Eigenwerte von A.

Klassifikation und Aufzählung:
Durch die oben erwähnte Drehung gelangt man stets auf eine Form ohne gemischt quadratische Glieder (Diagonalform):

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + f = 0$$

Falls $a_{11} \neq 0$: Parallelverschiebung $x_1 = \hat{x}_1 - \dfrac{p_1}{2a_{11}}$,

falls $a_{22} \neq 0$: Parallelverschiebung $x_2 = \hat{x}_2 - \dfrac{p_2}{2a_{22}}$,

falls $a_{33} \neq 0$: Parallelverschiebung $x_3 = \hat{x}_3 - \dfrac{p_3}{2a_{33}}$.

Damit erhalten wir die folgenden

3 Hauptfälle:

(I)	$a_{11} \neq 0,\ a_{22} \neq 0,\ a_{33} \neq 0$	3 Parallelverschiebungen sind möglich,
(II)	$a_{11} \neq 0,\ a_{22} \neq 0,\ a_{33} = 0$	2 Parallelverschiebungen sind möglich,
(III)	$a_{11} \neq 0,\ a_{22} = 0,\ a_{33} = 0$	1 Parallelverschiebung ist möglich.

Bemerkungen:

(i) Fälle wie $a_{11} = 0,\ a_{22} \neq 0,\ a_{33} \neq 0$ erhält man durch Umnumerierung.

(ii) Triviale Fälle ohne quadratische Glieder (Ebene) werden im folgenden übergangen.

Parallelverschiebung liefert:

(I$_1$) $Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + D = 0,\ D \neq 0$

(I$_2$) $Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 = 0$

(II$_1$) $Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3 = 0,\ C \neq 0$

(II$_2$) $Ax_1^2 + Bx_2^2 + D = 0,\ D \neq 0$

(II$_3$) $Ax_1^2 + Bx_2^2 = 0$

(III$_1$) $x_1^2 + Bx_2 = 0,\ B \neq 0$

(III$_2$) $x_1^2 + D = 0,\ D \neq 0$

(III$_3$) $x_1^2 = 0$

Bemerkung zum 3. Hauptfall:

Zunächst erhält man: $\hat{A}x_1^2 + \hat{B}x_2 + \hat{C}x_3 + \hat{D} = 0,\ \hat{A} \neq 0.$

Setze: $x_1 = \hat{x}_1,\ x_2 = \hat{x}_2 \cos\varphi - \hat{x}_3 \sin\varphi,\ x_3 = \hat{x}_2 \sin\varphi + \hat{x}_3 \cos\varphi.$ Dies bedeutet eine Drehung um die x_1-Achse um den Winkel φ. Dann folgt:

$\hat{A}\hat{x}_1^2 + (\hat{B}\cos\varphi + \hat{C}\sin\varphi) + (-\hat{B}\sin\varphi + \hat{C}\cos\varphi) + \hat{D} = 0.$

Wähle φ derart, daß $-\hat{B}\sin\varphi + \hat{C}\cos\varphi = 0$. Wir unterscheiden 2 Fälle:

(i) $\hat{B} = 0$, dann wählen wir $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$,

(ii) $\hat{B} \neq 0$, dann wählen wir $\tan\varphi = \dfrac{\hat{C}}{\hat{B}}$.

Damit erhalten wir: $\hat{A}x_1^2 + \tilde{B}\hat{x}_2 + \hat{D} = 0$, woraus wegen $\hat{A} \neq 0$ nach Division durch $\hat{A}$ die Fälle (III$_1$), (III$_2$) und (III$_3$) folgen.

Auflistung der einzelnen Fälle:

(I$_1$) $Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + D = 0, \quad A, B, C, D \neq 0$

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{-D}{A}\right)} + \frac{x_2^2}{\left(\frac{-D}{B}\right)} + \frac{x_3^2}{\left(\frac{-D}{C}\right)} = 1$$

Nun ist entweder $\dfrac{-D}{A} = a^2 > 0$ oder $\dfrac{-D}{A} = -a^2 < 0$.

Analoges gilt für den 2. und 3. Term.

$$
\begin{array}{llcll}
(1) & \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} + \dfrac{x_3^2}{c^2} & = & 1 & \cdots \text{ Ellipsoid} \\[2ex]
(2) & \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} - \dfrac{x_3^2}{c^2} & = & 1 & \cdots \text{ einschaliges Hyperboloid} \\[2ex]
(3) & \dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{x_2^2}{b^2} - \dfrac{x_3^2}{c^2} & = & 1 & \cdots \text{ zweischaliges Hyperboloid} \\[2ex]
(4) & -\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{x_2^2}{b^2} - \dfrac{x_3^2}{c^2} & = & 1 & \cdots \text{ „nullteilige Fläche”}
\end{array}
$$

(I$_2$) $Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 = 0, \quad A, B, C \neq 0$

$$(5) \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 0 \quad \cdots \quad \text{entartete Fläche (Punkt)}$$

$$(6) \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0 \quad \cdots \quad \text{Kegel}$$

(II$_1$) $Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3 = 0, \quad A, B, C \neq 0$

$$(7) \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 2px_3,\ p \neq 0 \quad \cdots \quad \text{elliptisches Paraboloid}$$

$$(8) \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 2px_3,\ p \neq 0 \quad \cdots \quad \text{hyperbolisches Paraboloid}$$

(II$_2$) $Ax_1^2 + Bx_2^2 + D = 0, \quad A, B, D \neq 0$

$$(9) \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad \cdots \quad \text{elliptischer Zylinder}$$

$$(10) \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad \cdots \quad \text{hyperbolischer Zylinder}$$

$$(11) \quad -\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad \cdots \quad \text{„nullteiliger" Zylinder}$$

(II$_3$) $Ax_1^2 + Bx_2^2 = 0, \quad A, B \neq 0$

$$(12) \quad x_1^2 + \frac{x_2^2}{b^2} = 0 \quad \cdots \quad \text{konjugiert komplexe Ebenen mit reeller Schnittgeraden } (x_3\text{-Achse})$$

$$(13) \quad x_1^2 - \frac{x_2^2}{b^2} = 0 \quad \cdots \quad \text{reelle, sich schneidende Ebenen}$$

(III$_1$) $x_1^2 + Bx_2 = 0, \quad B \neq 0$

$$(14) \quad x_1^2 = 2px_2,\ p \neq 0 \quad \cdots \quad \text{parabolischer Zylinder}$$

(III$_2$) $x_1^2 + D = 0, \quad D \neq 0$

$$(15) \quad x_1^2 = k^2,\ k \neq 0 \quad \cdots \quad \text{reelle parallele Ebenen}$$

$$(16) \quad x_1^2 = -k^2,\ k \neq 0 \quad \cdots \quad \text{konjugiert komplexe Ebenen}$$

(III$_3$) $x_1^2 = 0$

$$(17) \quad x_1^2 = 0 \quad \cdots \quad \text{Doppelebene}$$

Beschreibung der Flächen

Neben der Untersuchung, ob eine Zylinder- oder eine Rotationsfläche vorliegt, kann man sich durch ebene Schnitte (parallel zu den Koordinatenebenen) eine gewisse Übersicht verschaffen. Mit Hilfe der sich ergebenden Schnittlinien lassen sich die Flächen meist leicht identifizieren.

(1) Ellipsoid: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} + \dfrac{x_3^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0$

$\Longrightarrow \dfrac{x_1^2}{a^2} \leq 1, \quad \dfrac{x_2^2}{b^2} \leq 1, \quad \dfrac{x_3^2}{c^2} \leq 1,$ d.h. die Fläche liegt ganz im Endlichen.

Schnitt mit der Ebene $x_1 = d,\ |d| < a$:

$$\frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 - \frac{d^2}{a^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{x_2^2}{b^2 \frac{a^2-d^2}{a^2}} + \frac{x_3^2}{c^2 \frac{a^2-d^2}{a^2}} = 1$$

Dies ist eine Ellipe in der Ebene $x_1 = d$.
Analoge Ellipsen ergeben sich für $x_2 = e$ bzw. $x_3 = f$.

(2) Einschaliges Hyperboloid: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} - \dfrac{x_3^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0$

Schnitt mit der Ebene $x_3 = d,\ d \in \mathbb{R}$:

$\Longrightarrow \dfrac{x_1^2}{a^2 \frac{c^2+d^2}{c^2}} + \dfrac{x_2^2}{b^2 \frac{c^2+d^2}{c^2}} = 1 \quad \cdots \quad$ Ellipse in der Ebene $x_3 = d$.

Schnitt mit der Ebene $x_1 = e,\ |e| \neq a$:

$\Longrightarrow \dfrac{x_2^2}{b^2 \frac{a^2-e^2}{a^2}} - \dfrac{x_3^2}{c^2 \frac{a^2-d^2}{a^2}} = 1 \quad \cdots \quad$ Hyperbel in der Ebene $x_1 = e$.

Speziell: $|e| = a$: $\dfrac{x_2^2}{b^2} = \dfrac{x_3^2}{c^2} \quad \cdots \quad$ Asymptoten der Hyperbel

Schnitt mit der Ebene $x_2 = f,\ |f| \neq b$: Analog zu $x_1 = e$

Spezialfall: $a = b \quad \cdots \quad$ Rotationshyperboloid

(3) Zweischaliges Hyperboloid: $\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{x_2^2}{b^2} - \dfrac{x_3^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0$

Schnitt mit der Ebene $x_1 = d,\ d \in \mathbb{R}$: $\Longrightarrow \dfrac{x_2^2}{b^2} + \dfrac{x_3^2}{c^2} = \dfrac{d^2 - a^2}{a^2}$

$|d| < a$: keine reellen Punkte
$|d| = a$: 2 Punkte $(\pm a, 0, 0)$
$|d| > a$: Ellipsen (Kreise)

Schnitt mit der Ebene $x_2 = e,\ e \in \mathbb{R}$ (bzw. $x_3 = f,\ f \in \mathbb{R}$):

$\Longrightarrow \dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{x_3^2}{c^2} = 1 + \dfrac{e^2}{b^2} \quad \cdots \quad$ Hyperbel in der Ebene $x_2 = e$

(6) Kegel: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} - \dfrac{x_3^2}{c^2} = 0, \quad a, b, c > 0$

Mit $P(x_1, x_2, x_3)$ liegt auch $Q(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ auf der Fläche und damit auch die Gerade durch P und den Ursprung (Kegelspitze)

Schnitt mit der Ebene $x_3 = d,\ d \in \mathbb{R},\ d \neq 0$:

$\Longrightarrow \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = \dfrac{d^2}{c^2} \quad \cdots \quad$ Ellipse in der Ebene $x_3 = d$

Schnitt mit der Ebene $x_1 = e,\ e \in \mathbb{R},\ e \neq 0$:

$\Longrightarrow \dfrac{x_3^2}{c^2} - \dfrac{x_2^2}{b^2} = \dfrac{e^2}{a^2} \quad \cdots \quad$ Hyperbel in der Ebene $x_1 = e$

Schnitt mit der Ebene $x_1 = 0 :\Longrightarrow x_3 = \pm\dfrac{b}{c}x_2 \quad \cdots \quad$ 2 Geraden durch die Spitze

(7) Elliptisches Paraboloid: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 2px_3,\ p \neq 0$

Aus $p > 0$ folgt $x_3 \geq 0$. Schnitt mit der Ebene $x_3 = c,\ c \geq 0$ liefert:

$\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 2pc \quad \cdots \quad$ Ellipse in der Ebene $x_3 = c$

Schnitt mit der Ebene $x_1 = d,\ d \in \mathbb{R}$:

$\dfrac{x_2^2}{b^2} = 2px_3 - \dfrac{d^2}{b^2}$ bzw. $x_2^2 = 2b^2px_3 - \dfrac{d^2b^2}{a^2} \quad \cdots \quad$ Parabel in der Ebene $x_1 = d$

(8) Hyperbolisches Paraboloid: $\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{x_2^2}{b^2} = 2px_3,\ p \neq 0$

Schnitt mit der Ebene $x_3 = c,\ d \in \mathbb{R}$:

$\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{x_2^2}{b^2} = 2pc \quad \cdots \quad$ Hyperbel in der Ebene $x_3 = c$

Schnitt mit der Ebene $x_1 = d,\ d \in \mathbb{R}$:

$\dfrac{x_2^2}{b^2} = -2px_3 + \dfrac{d^2}{a^2}$ bzw. $x_2^2 = -2b^2px_3 + \dfrac{d^2b^2}{a^2} \quad \cdots \quad$ Parabel in der Ebene $x_1 = d$