Kap 0 : Wiederholung

1) Metrische Räume (X, d)

X ..... Menge , $d: X \times X \to \mathbb{R}$ mit

(a) $d(x,y) \geq 0 \qquad \forall\, x, y \in X$

(b) $d(y,x) = d(y,x) \qquad \forall\, x, y \in X$

(c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \qquad \forall\, x, y, z \in X$

Beispiele :

(i) $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$

$X = \mathbb{C}$, $d(z,w) = |z-w|$ (Betrag komplexer Zahlen)

(ii) (Euklidische Metrik)

$X = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ $\quad x_i, y_i \in \mathbb{R}$

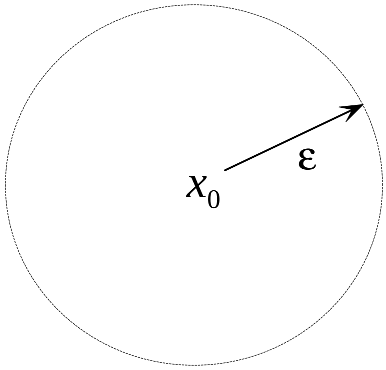
$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$X = \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$ $\quad z_i, w_i \in \mathbb{C}$

$$d(z,w) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i - w_i|^2}$$

<u>(offene) ε – Kugel</u> um $x_0 \in X$:

$$K(x_0, \varepsilon) = \{ x \in X \ : \ d(x_0, x) < \varepsilon \}$$



$O \subseteq X$ heißt <u>offene Menge</u> , wenn

$$\forall x \in O \ \ \exists \varepsilon_x > 0 \ : \ K(x, \varepsilon_x) \subseteq O$$

$F \subseteq X$ heißt <u>abgeschlossene Menge</u> , wenn

$X - F$ eine offene Menge ist, bzw.

$$\forall x \notin F \ \ \exists \varepsilon_x > 0 \ : \ K(x, \varepsilon_x) \cap F = \emptyset$$

Sei $A \subseteq X$:

$\overline{A} = \{ x \in X : \ K(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \ , \forall \varepsilon > 0 \}$ <u>abg. Hülle von A</u>

$\operatorname{int} A = \{ x \in X : \ \exists \varepsilon > 0 \ mit \ K(x, \varepsilon) \subseteq A \}$ <u>Inneres von A</u>

$D \subseteq X$ heißt <u>dicht</u> , wenn $\overline{D} = X$ bzw.

$$\forall O \neq \emptyset \ \ offen : \ \ D \cap O \neq \emptyset$$

$C \subseteq X$ heißt <u>kompakte Teilmenge</u> , wenn jede offene Überdeckung von C eine endliche Teilüberdeckung enthält, d.h.

$$C \subseteq \bigcup \{ O_i : i \in I \} , \ O_i \ ... \ offen , \ \Rightarrow$$

$$\exists \, i_1 , i_2 , ..., i_k \in I \quad mit \quad C \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup ... \cup O_{i_k}$$

<u>Satz von HEINE-BOREL :</u>

$$X = \mathbb{R}^n \ (bzw. \, \mathbb{C}^n) + \ euklidische Metrik$$

$C \subseteq X$ ... kompakt $\Leftrightarrow$ C ist abgeschlossen und beschränkt

---

(x_n) heißt <u>Cauchy – Folge</u>, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N \ : \ d(x_n , x_m) < \varepsilon$$

(X , d) heißt <u>vollständig</u> , wenn jede Cauchy – Folge konvergiert.

Seien (X,d) , (Y,ρ) metrische Räume.

$f: X \to Y$ heißt stetig in $x_0 \in X$, wenn
$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \textit{sodaß}: \; d(x_0, x) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$

d.h. $f(K(x_0,\delta)) \subseteq K(f(x_0),\varepsilon)$

$f: X \to Y$ heißt <u>stetig</u> , wenn f stetig in jedem $x_0 \in X$ ist.

<u>Es gilt :</u> $f: X \to Y$ ist stetig $\Leftrightarrow$

Urbilder offener Mengen sind offen, d.h.

$\forall\, V \subseteq Y \;\; \textit{offen}: \; f^{-1}(V) \subseteq X \;\; \textit{offen}$, $\Leftrightarrow$

Urbilder abg. Mengen sind abg. , d.h.

$\forall\, B \subseteq Y \;\; \textit{abg.}: \; f^{-1}(B) \subseteq X \;\; \textit{abg.}$

$f: X \to Y$ heißt <u>gleichmäßig stetig</u> , wenn
$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \textit{sodaß}: \; d(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$

<u>Es gilt :</u> gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ stetig

2) Normierte Räume

X ..... Vektorraum über Körper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{K}=\mathbb{C}$)

$\| \ \| : X \to \mathbb{R}$ heißt Norm auf X , wenn

(a) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x=0$ (Nullvektor in X)

(b) $\|\lambda.x\| = |\lambda|.\|x\| \quad \lambda\in\mathbb{K}$, $x\in X$

(c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x, y \in X$

Beispiele :

1) $X = \mathbb{R}^n$ ist Vektorraum über $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}$ euklidische Norm

$\|x\| = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$ Maximumsnorm

2) $X = \mathbb{C}^n$ ist Vektorraum über $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

$\|z\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}$ euklidische Norm

$\|z\| = \max_{1\leq i\leq n} |z_i|$ Maximumsnorm

3) $C(X) = \{ \ f : X \to \mathbb{R} \ : \ f \ ist\,stetig \ \}$,

wobei X ein <u>kompakter</u> metrischer Raum ist.

$C(X)$ ist Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mittels

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\lambda.f)(x) := \lambda.f(x) \ , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\|f\| := \max_{x \in X} |f(x)|$$ Maximumsnorm

Analoges gilt auch für den $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$C(X,\mathbb{C}) = \{ \ f : X \to \mathbb{C} \ : \ f \ ist\,stetig \ \}$$

Jeder normierte Raum $(X, \| \ \|)$ wird zu metrischen Raum

durch $d(x,y) = \|x - y\|$.

Vollständige normierte Räume heißen <u>Banachräume</u> .

$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $C(X)$ *und* $C(X,\mathbb{C})$ sind Beispiele für Banachräume.

3) Maßräume ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{K}=\mathbb{C}$)

(X, Ω, μ) Maßraum + Lebesgue Integral

Für eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{K}$ und $p \geq 1$ heißt

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

die p – Norm von f .

Höldersche Ungleichung : $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\int_X |f . g| \, d\mu \leq \|f\|_p . \|g\|_q$$

Minkowski Ungleichung : $p \geq 1$

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

$$L^p(X) = \{ \ f : X \to \mathbb{K} : \ f \ \textit{ist meßbar, und} \ \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \ \} ,$$

wobei Funktionen identifiziert werden, die fast überall gleich sind.

<u>Damit :</u> $L^p(X)$ ist $\mathbb{K}$ - Vektorraum

$\|f\|_p$ ist Norm auf $L^p(X)$

$L^p(X)$ ist Banachraum .

$$L^\infty(X) = \{ \ f : X \to \mathbb{K} : \ \ f \ ... \ meßbar, \ \ fast\ überall\ beschränkt \ \}$$

(wiederum werden Funktionen identifiziert, die fast überall gleich sind)

$L^\infty(X)$ ist $\mathbb{K}$ - Vektorraum

$\|f\|_\infty := \sup ess |f| = \inf\limits_{A \subseteq X, \mu(A)=0} \ \sup\limits_{x \in X - A} |f(x)|$ ist Norm

$L^\infty(X)$ ist Banachraum .

<u>Bemerkung :</u> Genaugenommen erhält man also die Banachräume

$$L^p_{\mathbb{R}}(X), \ L^\infty_{\mathbb{R}}(X), \ L^p_{\mathbb{C}}(X) \ und \ L^\infty_{\mathbb{C}}(X) .$$

4) Spezialfall von 3)

$X = \mathbb{N}$, $\Omega = P(\mathbb{N})$, μ*.....Zählmaß*

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ ist also eine Folge (ξ_k) von reellen (komplexen) Zahlen (wobei $f(k) = \xi_k$) .

Es gilt : $$\int_X |f|^p d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p$$

Statt $L^p(X)$ bzw. $L^\infty(X)$ schreibt man hier l^p bzw. l^∞ .

$$l^p = \{ \ x = (\xi_k) \ : \ \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty \ \}$$

$$l^\infty = \{ \ x = (\xi_k) \ : \ (\xi_k) \ \textit{ist beschränkt} \ \} \ , \ (\ \|x\| = \sup_{k \ge 1} |\xi_k| \ )$$

Hölder – Ungleichung : $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right)^{1/q} ,$$

Minkowski – Ungleichung :

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p \right)^{1/p}$$