Kurven 2.Ordnung (Kegelschnitte)

Allgemeine Kegelschnittsgleichung :

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0$$

bzw.

$$x^T A x + p^T x + f = 0$$

wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$.

Es werden 2 Fälle unterschieden :

<u>**Fall 1 :** $\det A \neq 0$</u>

Schritt 1 : (Parallelverschiebung)
Dazu wählt man den Ansatz : $x = y + q$, wobei $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, und $q = -\frac{1}{2}A^{-1}p$ (**Mittelpunkt** des Kegelschnitts).

Mit $f^* = f + \frac{1}{2}p^T q$ ergibt sich

$$y^T A y + f^* = 0 \quad \text{bzw.} \quad ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2 + f^* = 0.$$

(Man beachte, dass $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$)

Schritt 2 : (Drehung)
Ansatz : $y = Bz$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$
Man bestimmt die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A . Die Spalten der Matrix B sind dann die zugehörigen normierten Eigenvektoren v_1, v_2 . Diese werden so gewählt, dass $\det B = +1$ gilt.

Wegen $B^T AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ gilt nun : $z^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} z + f^* = 0$ bzw.

$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + f^* = 0$. Dies ist die **Normalform** des Kegelschnitts.

Die Matrix B heißt **Drehmatrix** , der **Drehwinkel** φ ergibt sich aus

$$B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} .$$

Schritt 3 : (Klassifizierung)

(i) $f^* = 0$

(a) sign $\lambda_1 =$ sign λ_2 **Punkt**

(b) sign $\lambda_1 \neq$ sign λ_2 **Geradenpaar**

(ii) $f^* \neq 0$

(a) sign $\lambda_1 =$ sign $\lambda_2 =$ sign f^* **keine reellen Lösungen**

(b) sign $\lambda_1 =$ sign $\lambda_2 \neq$ sign f^* **Ellipse**

(c) sign $\lambda_1 \neq$ sign λ_2 **Hyperbel**

Fall 2 : $\det A = 0$

d.h. ein Eigenwert ist Null , setze etwa $\lambda_2 = 0$.

Schritt 1 : (Drehung)

Man wählt den Ansatz : $x = By$, wobei $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Die Spalten von B sind die normierten Eigenvektoren v_1, v_2 zu den Eigenwerten λ_1, λ_2 von A . Wiederum gilt $\det B = +1$.

Wegen $B^T AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt dann :

$$\lambda_1 y_1^2 + \overline{d} y_1 + \overline{e} y_2 + f = 0 \quad , \text{wobei} \quad p^T B = (\overline{d} \;\; \overline{e}) .$$

Schritt 2 :

(i) $\lambda_1 = 0$, d.h. $\overline{d}y_1 + \overline{e}y_2 + f = 0$

(a) wenn $\begin{pmatrix} \overline{d} \\ \overline{e} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ergibt sich eine **Gerade**.

(b) sonst : **keine Lösung** (wenn $f \neq 0$) , bzw. **jeder Punkt ist Lösung** (wenn $f = 0$) .

(ii) $\lambda_1 \neq 0$.

Durch quadratische Ergänzung erhält man

$$(y_1 + \frac{\overline{d}}{2\lambda_1})^2 + \frac{\overline{e}}{\lambda_1}y_2 + \frac{f}{\lambda_1} - \frac{\overline{d}^2}{4\lambda_1^2} = 0.$$

(a) $\overline{e} \neq 0$

Die Parallelverschiebung $z_1 = y_1 + \frac{\overline{d}^2}{2\lambda_1}$, $z_2 = y_2 + \frac{f}{\overline{e}} - \frac{\overline{d}^2}{4\overline{e}\lambda_1}$

liefert $\lambda_1 z_1^2 + \overline{e}z_2 = 0$.

Dies ist die Normalform der **Parabel**.

(b) $\overline{e} = 0$

Man erhält $y_1 = -\frac{\overline{d}}{2\lambda_1} \pm \sqrt{\frac{\overline{d}^2}{4\lambda_1^2} - \frac{f}{\lambda_1}}$.

Dadurch werden 2 **parallele Gerade** (ev. komplex) beschrieben.