Kap 3: Lineare Abbildungen

• Es seien V und W K-Vektorräume. Eine Abbildung $F : V \to W$ heißt K-linear (bzw. abgekürzt, linear), wenn

L1) $F(v + w) = F(v) + F(w) \quad \forall\, v, w \in V$

L2) $F(\lambda v) = \lambda F(v) \quad \forall\, v \in V \;\; \forall\, \lambda \in K$.

Die Bedingungen L1) und L2) sind äquivalent zu:

$F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w) \quad \forall\, v, w \in V \quad \forall\, \lambda, \mu \in K$.

Mittels vollständiger Induktion gilt offenbar für eine lineare Abbildung $F : V \to W$:

$F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ...\lambda_n v_n) = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) + ...\lambda_n F(v_n) \quad v_i \in V \quad \lambda_i \in K$.

• **Elementare Eigenschaften.** Sei $F : V \to W$ linear.

1) $F(0) = 0$, $F(v - w) = F(v) - F(w)$

2) $(v_i)_{i\in I}$ linear abhängig in $V \Rightarrow (F(v_i))_{i\in I}$ linear abhängig in W

3) $(F(v_i))_{i\in I}$ linear unabhängig in $W \Rightarrow (v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig in V

4) $V' \lhd V \Rightarrow F(V') \lhd W$

5) $W' \lhd W \Rightarrow F^{-1}(W') \lhd V$

6) $\dim F(V) \leq \dim W$.

• **Beispiele für lineare Abbildungen.**

1) Die Nullabbildung $F : V \to W$, $F(v) = 0 \;\; \forall\, v \in V$, ist stets linear. Die identische Abbildung $F : V \to V$, $F(v) = v \;\; \forall\, v \in V$, ist stets linear.

2) Für festes $\lambda \in K$ ist die Abbildung $F : K^n \to K^n$, $F(v) = \lambda v$, linear.

3) Jede $m \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ definiert eine lineare Abbildung $F : K^n \to K^m$ durch $F(v) = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \;, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \;, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j)$ für $v = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

4) Ist X eine beliebige Menge , V =Abb$(X, \mathbb{R})$ und $\varphi : X \to X$ eine beliebige Abbildung, dann ist $F : V \to V$ mit $F(f) = f \circ \varphi$ eine lineare Abbildung.

• Die folgende Aussage dient oft dazu, lineare Abbildungen zu definieren. Sie besagt, daß eine lineare Abbildung durch die Bilder der Vektoren einer Basis eindeutig bestimmt ist.

Satz. Seien V, W K-Vektorräume, $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V und $(w_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie in W .

Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $F : V \to W$ mit $F(v_i) = w_i \quad \forall\, i \in I$.

Des weiteren gilt:

a) $F(V) = \mathrm{Span}(w_i)$,

b) F ist injektiv $\Leftrightarrow$ (w_i) ist linear unabhängig.

Ist $(v_i)_{i\in I}$ lediglich eine linear unabhängige Familie in V, dann wird es i.a. mehrere lineare Abbildungen $F : V \to W$ geben mit $F(v_i) = w_i \quad \forall\, i \in I$.

• Eine lineare Abbildung $F : V \to W$ wird auch als Homomorphismus bezeichnet. Die Menge aller Homomorphismen $V \to W$ wird mit $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ bezeichnet.

$F \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ heißt

Isomorphismus, wenn F bijektiv ist,

Monomorphismus, wenn F injektiv ist,

Epimorphismus, wenn F surjektiv ist,

Endomorphismus, wenn $V = W$ ist,

Automorphismus, wenn $V = W$ und F bijektiv ist.

Sind $F : V \to W$ und $G : W \to U$ lineare Abbildungen, dann ist auch $G \circ F : V \to U$ wieder linear.

Ist $F : V \to W$ ein Isomorphismus, dann ist die Umkehrabbildung $F^{-1} : W \to V$ ebenfalls linear und damit ist auch F^{-1} ein Isomorphismus.

$\mathrm{Aut}(V)$, die Menge der Automorphismen von V , ist eine Gruppe bzgl. der Verknüpfung von Abbildungen.

Es seien V, W K-Vektorräume. Für jede beliebige Menge X ist dann $\mathrm{Abb}(X, W)$ ein K-Vektorraum durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Insbesondere ist damit $\mathrm{Abb}(V, W)$ ein K-Vektorraum, und $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(V, W)$.

- **Kern und Bild einer linearen Abbildung.**

Es sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann heißt
$\mathrm{Ker}F = F^{-1}(0) = \{v \in V \ : \ F(v) = 0\}$ der Kern von F ,
$\mathrm{Im}F = F(V)$ das Bild von F .

Offenbar ist $\mathrm{Ker}F \lhd V$ und $\mathrm{Im}F \lhd W$. Des weiteren gilt:
F ist injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}F = \{0\}$, und F ist surjektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}F = W$.

Ist $\dim V < \infty$, dann gilt die wichtige Dimensionsformel:

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}F + \dim \mathrm{Im}F \ .$$

- **Die transponierte Matrix**

Es sei $A \in M(m \times n; K)$. Für $i \in \{1, ..., m\}$ und $j \in \{1, ..., n\}$ setze $b_{ji} = a_{ij}$. Die $n \times m$ Matrix ${}^tA = (a_{ji})$ heißt dann die zu A transponierte Matrix.
Folgende Rechenregeln gelten für $A, B \in M(m \times n; K)$ und $\lambda \in K$:

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB \quad , \quad {}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA \quad , \quad {}^t({}^tA) = A \ .$$

- **Matrizenmultiplikation**

Seien $A = (a_{ij}) \in M(m \times n; K)$ und $B = (b_{jk}) \in M(n \times r; K)$, d.h. die Spaltenanzahl von A ist gleich der Zeilenanzahl von B .
Dann ist eine Matrix $C = A.B = (c_{ik}) \in M(m \times r; K)$ folgendermaßen erklärt:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{in}b_{nk} \quad \text{für} \quad i = 1, ..., m \quad \text{und} \quad k = 1, ..., r \ .$$

$C = AB$ heißt das Produkt der Matrizen A und B . Man beachte, daß AB nur dann definiert ist, wenn die Spaltenanzahl von A gleich der Zeilenanzahl von B ist. Zudem ist die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ, d.h. selbst wenn die Matrizen AB und BA existieren, wird i.a. $AB \neq BA$ sein.

Definition. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ heißt die (quadratische) $n \times n$ Matrix

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{die } n\text{-reihige Einheitsmatrix.}$$

Offenbar gilt für jede Matrix $A \in M(n \times n; K)$: $AE_n = E_n A = A$.

Für $A, A' \in M(m \times n; K)$, $B, B' \in M(n \times r; K)$, $C \in M(r \times s; K)$ und $\lambda \in K$ sind folgende Rechenregeln erfüllt:

1) $A(B + B') = AB + AB'$, $(A + A')B = AB + A'B$
2) $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$
3) $(AB)C = A(BC)$
4) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$