# Kap 6: Lineare Gleichungssysteme

- Es sei $K$ ein Körper. Dann heißt

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ &... \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

ein lineares Gleichungssystem mit $m$ Gleichungen und $n$ Unbestimmten $x_1, x_2, ..., x_n$ , wobei $a_{ij} \in K$ und $b_i \in K$ .

Die $m \times n$ Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$ heißt die zugehörige Koeffizentenmatrix.

Mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$ ergibt sich die kompakte Kurzschreibweise $Ax = b$ für ein lineares Gleichungssystem.

Das Gleichungssystem $Ax = b$ heißt homogen, wenn $b = 0$, ansonsten inhomogen.

- **Homogene Gleichungssysteme**

Gegeben sei also ein Gleichungssystem $Ax = 0$ . Wir suchen alle Vektoren $x \in K^n$ mit $Ax = 0$ , i.e. die Lösungen des Gleichungssystems. Dabei heißt $W = \{x \in K^n \ : \ Ax = 0\}$ der Lösungsraum des Gleichungssystems.

Betrachten wir die lineare Abbildung $L_A : K^n \to K^m$ mit $L_A(x) = Ax$ , dann ergibt sich sofort, daß $W = \mathrm{Ker} L_A \lhd K^n$ ist und $\dim W = n - \mathrm{rang} A$ . Insbesondere ist also ein homogenes Gleichungssystem immer lösbar, weil $x = 0$ eine Lösung ist.

**Beobachtung.** Entsteht die Matrix $B$ durch elementare Zeilenumformungen aus der Matrix $A$ , dann haben die Gleichungssysteme $Ax = 0$ und $Bx = 0$ gleiche Lösungsräume.

Damit ergibt sich ein Verfahren zur Bestimmung der allgemeinen Lösung von $Ax = 0$ : Führe die Matrix $A$ durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix $B$ in Zeilenstufenform über. Die Stufen mögen dabei an den Spaltenindizes $j_1, j_2, ..., j_r$ auftreten. Werden die Unbestimmten $x_i$ mit $i \notin \{j_1, j_2, ..., j_r\}$ als frei wählbare Parameter gesetzt, dann können $x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_r}$ durch diese Parameter ausgedrückt werden. Man erhält auf diese Weise eine Basis für $W$ .

- **Inhomogene Gleichungssysteme und affine Unterräume**

Gegeben sei nun $Ax = b$ mit $b \neq 0$ . Wir bezeichnen den Lösungsraum mit $X = \{x \in K^n \ : \ Ax = b\}$ . Man beachte, daß $X$ im Falle $b \neq 0$ kein Unterraum von $K^n$ ist. Des weiteren ist offenbar jedem inhomogenen Gleichungssystem $Ax = b$ das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ zugehörig.

**Definition.** Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Dann heißt $X \subseteq V$ ein affiner Unterraum wenn $\exists\ v \in V \ \ \exists\ W \lhd V$ sodaß $X = v + W = \{v + w \ : \ w \in W\}$ .

Ist $X = v + W$ ein affiner Unterraum, dann ist der beteiligte Unterraum $W$ eindeutig bestimmt. Gilt $X = v + W = v' + W$ dann ist $v - v' \in W$ . Somit kann auch die Dimension eines affinen Unterraums $X = v + W$ durch $\dim X = \dim W$ erklärt werden.

Ist $F : V \to W$ eine lineare Abbildung, dann ist $F^{-1}(\{w\})$ , $w \in W$ , ein affiner Unterraum. Daraus ergibt sich für ein inhomogenes Gleichungssystem $Ax = b$ folgendes: setzen wir $X = \{x \in K^n \ : \ Ax = b\}$ und $W = \{x \in K^n \ : \ Ax = 0\}$ , dann ist $X = v + W$ , falls $X \neq \emptyset$ und $v \in X$ .

Damit: Falls $Ax = b$ überhaupt lösbar ist, dann ergibt sich die allgemeine Lösung von $Ax = b$ durch Addition einer speziellen Lösung von $Ax = b$ mit der allgemeinen Lösung von $Ax = 0$ .
Man beachte dabei, daß ein inhomogenes Gleichungssystem i.a. nicht lösbar zu sein braucht.

Somit stellt sich die Frage, wann $Ax = b$ eine Lösung besitzt. Dazu betrachtet man die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$A' = (A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} .$$

Es gilt:

$Ax = b$ ist lösbar $\quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rang} A = \mathrm{rang} A'$ .

Die Matrix $A$ definiert ein universell lösbares Gleichungssystem, wenn $\forall\, b \in K^m$ das Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar ist. Dies heißt nichts anderes, als daß die Abbildung $x \mapsto Ax$ surjektiv ist. Damit liefert $A$ ein universell lösbares Gleichungssystem genau dann, wenn $\mathrm{rang} A = m$ ist.

Das Gleichungssystem $Ax = b$ heißt eindeutig lösbar, wenn genau ein $x \in K^n$ mit $Ax = b$ existiert. Dies ist offenbar genau dann erfüllt, wenn $\mathrm{rang} A = \mathrm{rang} A' = n$ ist.

Die Bestimmung der allgemeinen Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$ erfolgt in analoger Weise zum homogenen Fall.
Man bringe die erweiterte Koeffizientenmatrix $A'$ auf Zeilenstufenform. An dieser Stelle zeigt sich dann, ob das Gleichungssystem überhaupt lösbar ist oder nicht. Im Falle der Lösbarkeit können die freien Parameter wie im homogenen Fall bestimmt werden.