Kap 2: Matrizen, Summe von Unterräumen

- Es sei K eine Körper. Ein rechteckiges Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit $a_{ij} \in K$ heißt eine $m \times n$ **Matrix**.

Die Matrixelemente a_{ij} heißen auch **Komponenten** der Matrix.

Für $i = 1, 2, ..., m$ heißt $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ die **i-te Zeile** von A bzw. der **i-te Zeilenvektor** von A .

Für $j = 1, 2, ..., n$ heißt $a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ die **j-te Spalte** von A bzw. der **j-te Spaltenvektor** von A .

Jede Zeile einer $m \times n$ Matrix kann als Element von $\mathbb{K}^n$ aufgefaßt werden.

Jede Spalte einer $m \times n$ Matrix kann als Element von $\mathbb{K}^m$ aufgefaßt werden.

- Die Menge $M(m \times n; K)$ der $m \times n$ Matrizen mit Elementen aus K bildet mit folgenden Operationen einen K-Vektorraum. Seien $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ $m \times n$ Matrizen und sei $\lambda \in K$.

Dann sei $A + B$ jene $m \times n$ Matrix (c_{ij}) mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ für alle i, j .

Die $m \times n$ Matrix λA sei die Matrix (d_{ij}) mit $d_{ij} = \lambda a_{ij}$ für alle i, j .

Der Nullvektor in diesem Vektorraum ist die **Nullmatrix** O deren Elemente aus lauter Nullen bestehen. Die inverse Matrix (bezüglich der Addition) von $A = (a_{ij})$ ist die Matrix $-A = (-a_{ij})$.

Die Matrizen $(E_{ij})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$ wobei E_{ij} jene $m \times n$ Matrix ist, die an der ij-ten Stelle 1 hat und sonst lauter Nullen, bilden eine Basis von $M(m \times n; K)$. Somit ist $\dim_K M(m \times n; K) = mn$.

• Eine $m \times n$ Matrix A heißt **quadratisch**, wenn $m = n$. Die Elemente $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ bilden dann die **Diagonalelemente** (bzw. **Hauptdiagonale**) von A .
Gilt weiters $a_{ij} = 0$ für $i > j$ (bzw. $i < j$) , dann heißt die (quadratische) Matrix A eine **obere** (bzw. **untere**) **Dreiecksmatrix**.
A heißt **Diagonalmatrix** wenn A quadratisch ist und $a_{ij} = 0$ ist für $i \neq j$.

• **Elementare Zeilenumformungen einer $m \times n$ Matrix**
Dies sind Umformungen der folgenden Typen:
I. Multiplikation der i-ten Zeile mit $\lambda \neq 0$
II. Addition der j-ten Zeile zur i-ten Zeile
III. Addition des λ-fachen der j-Zeile zur i-ten Zeile, $\lambda \neq 0$
IV. Vertauschen der i-ten Zeile mit der j-ten Zeile, $i \neq j$

Bemerkung. Die Umformungen III und IV ergeben sich durch wiederholte Anwendungen von I und II .

• Sei A eine $m \times n$ Matrix. Durch die Zeilen $a_1, \dots, a_m$ sind m Vektoren des $\mathbb{K}^n$ gegeben, durch die Spalten $a^1, \dots, a^n$ sind n Vektoren des $\mathbb{K}^m$ gegeben.

Der **Zeilenraum** von A ist $ZR(A) = \mathrm{Span}(a_1, \dots, a_m) \lhd K^n$,
der **Spaltenraum** von A ist $SR(A) = \mathrm{Span}(a^1, \dots, a^n) \lhd K^m$.

Der **Zeilenrang** von A ist $\mathrm{Zeilenrang}(A) = \dim_K ZR(A)$, der **Spaltenrang** von A ist $\mathrm{Spaltenrang}(A) = \dim_K SR(A)$. Offenbar gilt stets $\mathrm{Zeilenrang}(A) \leq m$ und $\mathrm{Spaltenrang}(A) \leq n$.

• Es sei A eine $m \times n$ Matrix. Die Matrix B entstehe aus A durch eine elementare

Zeilenumformung vom Typ I oder II. Dann gilt: $ZR(A) = ZR(B)$.

Folgerung. Wenn eine Matrix B aus einer Matrix A durch Anwendung von endlich vielen elementaren Zeilenumformungen entsteht, dann gilt: $ZR(A) = ZR(B)$.

- **Zeilenstufenform einer Matrix**

Eine $m \times n$ Matrix B ist in Zeilenstufenform wenn es Spaltenindizes $j_1 < j_2 < ... < j_k$ gibt, sodaß

i) die Elemente $b_{1j_1}, b_{2j_2}, ..., b_{kj_k}$ sind $\neq 0$,

ii) $b_{ij} = 0$ für $i = 1, ..., k$ und $j < j_i$,

iii) die Zeilen $b_{k+1}, ..., b_m$ sind Nullzeilen.

In diesem Fall bilden die Zeilenvektoren $b_1, b_2, ..., b_k$ eine Basis von $ZR(B)$ und damit ist Zeilenrang$(B) = k$.

Beispiel.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier ist $m = 4, n = 6$ sowie $j_1 = 2, j_2 = 4, j_3 = 5$.

b_1, b_2, b_3 bilden eine Basis von $ZR(B)$, also ist Zeilenrang$(B) = 3$.

Lemma. Jede $m \times n$ Matrix A kann durch endlich viele elementare Zeilenumformungen in eine Matrix B in Zeilenstufenform übergeführt werden.

Seien $v_1, v_2, ..., v_m \in K^n$ gegeben. Man bilde eine $m \times n$ Matrix A mit $v_1, v_2, ..., v_m$ als Zeilenvektoren, und führe die Matrix A in eine Matrix B in Zeilenstufenform über. Die Zeilenvektoren $\neq 0$ von B bilden dann eine Basis von $ZR(B)$ und damit auch eine Basis von $ZR(A) =$Span$(v_1, v_2, ..., v_m)$.

Insbesondere bilden die Vektoren $v_1, v_2, ..., v_n \in K^n$ genau dann eine Basis von K^n , wenn die $n \times n$ Matrix A mit den Zeilenvektoren $v_1, v_2, ..., v_n$ durch elementare Zeilenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix übergeführt werden kann, wobei alle Diagonalelemente $\neq 0$ sind.

- **Summen und direkte Summen**

Sei V ein K-Vektorraum und $W, W' \lhd V$. Dann heißt $W + W' = \text{Span}(W \cup W')$ die **Summe** der Unterräume W und W' . Damit ist $W + W'$ der kleinste Unterraum von V, der W und W' enthält.

Es gilt: $W + W' = \{v \in V \ : \ \exists \ w \in W \ , \ \exists \ w' \in W' \ \text{ sodaß } \ v = w + w'\}$
D.h. jedes Element von $W + W'$ kann als Summe eines Elementes aus W und eines Elementes aus W' dargestellt werden (wobei die Darstellung i.a. nicht eindeutig ist).

Falls V endlichdimensional ist, gilt: $\dim(W + W') = \dim W + \dim W' - \dim(W \cap W')$.

$W + W'$ ist die **direkte Summe** von W und W' , in Zeichen $W \oplus W'$, wenn zusätzlich $W \cap W' = \{0\}$.

Es gilt: Die Summe von W und W' ist direkt $\Leftrightarrow$
$\forall \ v \in W + W' \ \overset{1}{\exists} \ w \in W \ \overset{1}{\exists} \ w' \in W' \ \text{ sodaß } \ v = w + w'$

Für $\dim V < \infty$ und $W, W' \lhd V$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1) $V = W \oplus W'$,
2) $V = W + W'$ und $\dim V = \dim W + \dim W'$,
3) $W \cap W' = \{0\}$ und $\dim V = \dim W + \dim W'$.

Die vorhergehenden Überlegungen können leicht auf den Fall beliebig vieler Unterräume übertragen werden.
Sei V ein K-Vektorraum und $W_i \lhd V$ für alle $i \in I$.
Dann heißt $\sum\limits_{i \in I} W_i = \text{Span}(\bigcup\limits_{i \in I} W_i)$ die Summe der Untervektorräume W_i .
Falls $I = \{1, 2, ..., n\}$ dann schreibt man auch $W_1 + W_2 + ... + W_n$.
Wie vorher gilt hier analog: $v \in \sum\limits_{i \in I} W_i \ \Leftrightarrow \ v$ ist eine endliche Summe von Vektoren aus $\bigcup\limits_{i \in I} W_i$.
Die Summe $\sum\limits_{i \in I} W_i$ heißt direkte Summe, in Zeichen $\bigoplus\limits_{i \in I} W_i$, wenn zusätzlich $W_i \cap (\sum\limits_{j \neq i} W_j) = \{0\} \quad \forall \, i \in I$ gilt. Dies bedeutet wiederum nichts anderes als die Eindeutigkeit der Darstellung von Vektoren aus $\sum\limits_{i \in I} W_i$. Im Falle endlich vieler Unterräume schreibt man für die direkte Summe auch $W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$.