Mengen und Abbildungen

$\mathbb{N}$ ... Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, ...\}$

$\mathbb{Z}$ ... Menge der ganzen Zahlen $\{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$

$\mathbb{Q}$ ... Menge der rationalen Zahlen $\{ \frac{p}{q} : \; p, q \in \mathbb{Z} \;, q \neq 0\}$

$\mathbb{R}$ ... Menge der reellen Zahlen

• Aus gegebenen Mengen können **Teilmengen** ausgewählt werden, die durch gewisse Eigenschaften charakterisiert sind, z.B. $A := \{n \in \mathbb{Z} : \; n^2 = 25\}$.

• Sei I eine Menge ("Indexmenge") und sei für jedes $i \in I$ eine Menge X_i gegeben. Dann ist

$\bigcup\limits_{i \in I} X_i := \{ x \; : \; \exists \, i \in I \;\; mit \;\; x \in X_i \}$ die **Vereinigung** der Mengen X_i , und

$\bigcap\limits_{i \in I} X_i := \{ x \; : \; \forall \, i \in I \; gilt \;\; x \in X_i\}$ der **Durchschnitt** der Mengen X_i .

Für $I = \{1, 2, 3, ...\}$ schreibt man auch

$\bigcup\limits_{i \in I} X_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n$ bzw.

$\bigcap\limits_{i \in I} X_i = \bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_n$.

• Seien X, Y Mengen. Dann heißt

$X - Y = X \setminus Y = \{x \in X \; : \; x \notin Y\}$ die **Differenzmenge** .

• Seien $X_1, X_2, ..., X_n$ Mengen. Dann heißt

$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \{ (x_1, x_2, ..., x_n) \; : \; x_1 \in X_1, ..., x_n \in X_n\}$ die **Produktmenge** der Mengen X_i , $i = 1, ..., n$.

Die Gleichheit von zwei n-Tupel ist wie folgt definiert:

$(x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n) \;\Leftrightarrow\; x_1 = y_1, ..., x_n = y_n$

Gilt $X_1 = X_2 = ...X_n = X$, so schreibt man auch

$X_1 \times ... \times X_n = X \times ... \times X = X^n$ (vgl. $\mathbb{R}^n$) .

Sind X, Y Mengen, so heißt eine Vorschrift f, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet, eine **Abbildung von X nach Y**.
Schreibweise: $f : X \to Y \quad , \quad x \mapsto f(x)$.

$f(x)$ ... Bild von x unter der Abbildung f ,

X ... Definitionsbereich , Y ... Bildbereich, Wertebereich

- Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen den Mengen X, Y , $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$.

Dann heißt

$f(M) = \{y \in Y \ : \ \exists\, x \in M \ \ mit \ \ y = f(x)\} \subseteq Y$ das **Bild von** $M \subseteq X$,

$f^{-1}(N) = \{x \in X \ : \ f(x) \in N\} \subseteq X$ das **Urbild von** $N \subseteq Y$.

Die Abbildung $f|_M : M \to Y$ mit $x \mapsto f(x)$ heißt die **Einschränkung** von f auf M .

Der **Graph** von f ist die Menge $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \ : \ y = f(x)\} \subseteq X \times Y$.

- Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

injektiv, wenn $f(x) = f(x') \ \Rightarrow \ x = x' \quad \forall\, x, x' \in X$

surjektiv, wenn $f(X) = Y$

bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Beispiele:

1) Die Abbildung $id_X : X \to X$ mit $x \mapsto x$ heißt die **identische Abbildung** (bzgl. X). id_X ist immer bijektiv.

2) Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv.

- Sind $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen, dann heißt die Abbildung $g \circ f : X \to Z$ mit $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ die **Komposition** der Abbildungen f und g .

Die Komposition von Abbildungen ist *assoziativ*, d.h. ist zusätzlich $h : Z \to W$, dann gilt $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) : X \to W$.

- Es gilt:

1) $f : X \to Y$ ist injektiv $\Leftrightarrow$ $\exists\, g : Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$,

2) $f : X \to Y$ ist surjektiv $\Leftrightarrow$ $\exists\, g : Y \to X$ mit $f \circ g = id_Y$,

3) $f : X \to Y$ ist bijektiv $\Leftrightarrow$ $\exists\, g : Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$.

Im Falle der Bijektivität von f ist die Abbildung g eindeutig bestimmt und wird üblicherweise mit f^{-1} bezeichnet. f^{-1} heißt dann die **Umkehrabbildung** von f . (Die Umkehrabbildung existiert also genau dann, wenn die gegebene Abbildung bijektiv ist. Die Schreibweise f^{-1} ist dabei nicht mit dem Urbild einer Menge zu verwechseln, das ja immer existiert)