Topologie - Übungsblatt 1

1. Sei τ die cofinite Topologie auf einer Menge X . Man zeige:

   i) Ist X abzählbar, dann ist (X, τ) ein A_2-Raum.

   ii) Ist X überabzählbar, dann ist (X, τ) kein A_1-Raum.

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum mit der Topologie τ_d, und $A \subseteq X$. Dann ist $d|_{A \times A}$ eine Metrik auf A und liefert eine Topologie σ auf A. Man zeige:

   Die Spurtopologie $\tau_d|_A$ stimmt mit σ überein (und ist damit metrisierbar).

3. Man zeige: Jeder Teilraum eines A_1-Raumes (bzw. eines A_2-Raumes) ist wieder ein A_1-Raum (bzw. ein A_2-Raum) .

   (Es handelt sich hier also um sogenannte "vererbliche Eigenschaften")

4. Man zeige, daß die Sorgenfrey-Linie kein A_2-Raum ist.

5. Es seien (X, τ) und (Y, σ) A_2-Räume (bzw. A_1-Räume) . Man zeige, daß der Produktraum $X \times Y$ ebenfalls ein A_2-Raum (bzw. ein A_1-Raum) ist.

6. Es sei (X, τ) die Sorgenfrey-Linie. Dann heißt der Produktraum $X \times X$ die Sorgenfrey-Ebene. Man zeige, daß die Sorgenfrey-Ebene einen überabzählbaren, diskreten Teilraum besitzt. Man folgere daraus, daß die Sorgenfrey-Ebene kein A_2-Raum sein kann.

7. **Definition.** Für einen topologischen Raum (X, τ) und $A \subseteq X$ heißen

   i) $\text{int}A = \{x \in X \ : \ A \in \mathcal{U}(x)\}$ das Innere von A, und

   ii) $\overline{A} = \{x \in X \ : \ U \cap A \neq \emptyset \quad \forall\, U \in \mathcal{U}(x)\}$ die abgeschlossene Hülle von A .

   Man zeige:

   a) $\text{int}A$ ist die größte in A enthaltene offene Menge,

   b) $\text{int}(A \cap B) = \text{int}A \cap \text{int}B$ für $A, B \subseteq X$,

   c) $\overline{A}$ ist die kleinste, A umfassende abgeschlossene Menge,

   d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ für $A, B \subseteq X$,

   e) $X \setminus \overline{A} = \text{int}(X \setminus A)$ und $X \setminus \text{int}A = \overline{X \setminus A}$.

8. Sei (X,τ) ein topologischer Raum. Man zeige, daß die Bildung der abgeschlossenen Hülle folgende Eigenschaften besitzt:
   (AH1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$,
   (AH2) $A \subseteq \overline{A}$,
   (AH3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
   (AH4) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

   Damit können nun Topologien auf Mengen konstruiert werden. Sei X eine Menge und $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ ein Operator, der (AH1) - (AH4) erfüllt. Dann existiert genau eine Topologie τ auf X , sodaß $\Phi(A)$ die abgeschlossene Hülle von A bzgl. (X,τ) ist.

   (Anwendung: Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und $\mathcal{M}(R)$ die Menge aller maximalen Ideale von R . Für eine Teilmenge $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}(R)$ sei $\Phi(\mathcal{H}) = \{M \in \mathcal{M}(R) : \bigcap \mathcal{H} \subseteq M\}$. Dann erfüllt Φ die Eigenschaften (AH1) - (AH4) . Die dadurch definierte Topologie auf $\mathcal{M}(R)$ heißt die *Stone Topologie* .)

9. Sei $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ eine Abbildung und $\mathcal{S}$ eine Subbasis für (Y,σ) .
   Man zeige: f ist stetig $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(S) \in \tau$ für alle $S \in \mathcal{S}$.

10. Sei (X,τ) ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Man überlege sich, wann die charakteristische Funktion χ_A von A stetig ist.

11. Man zeige: $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ ist eine offene Abbildung $\Leftrightarrow$
    $\forall\, x \in X \;\; \forall\, U \in \mathcal{U}(x) \; : \; f(U) \in \mathcal{U}(f(x))$

12. Man zeige, daß $\mathbb{R}$ (mit der euklidischen Topologie) nicht zu einem Intervall $[a,b)$ homöomorph sein kann.

13. Es seien (X,τ) und (Y,σ) topologische Räume, $X \times Y$ der zugehörige Produktraum. Die Projektionsabbildungen seien mit $p_1 : X \times Y \to X$ und $p_2 : X \times Y \to Y$ wobei $p_1((x,y)) = x$ bzw. $p_2((x,y)) = y$ ist, bezeichnet.
    Man zeige, daß die Produkttopologie die initiale Topologie bzgl. der Projektionsabbildungen ist, und daß p_1 und p_2 stetige und offene Abbildungen sind.

14. Es seien (X,τ) und (Y,σ) topologische Räume, $\{A_i : i \in I\}$ sei eine Überdeckung von X, i.e. $\bigcup_{i\in I} A_i = X$, und $f : X \to Y$ sei eine Abbildung sodaß alle Einschränkungen $f|_{A_i} : A_i \to Y$ stetig sind. Man zeige:
    i) gibt es ein $i \in I$ sodaß ein Punkt $x_0 \in \mathrm{int} A_i$, dann ist f stetig in x_0 ,
    ii) sind alle Mengen A_i offen, dann ist f stetig,

iii) ist $\{A_i : i \in I\}$ eine endliche Familie von abgeschlossenen Mengen, dann ist f stetig.

15. Sei X ein normierter Raum und X' der zugehörige Dualraum.
Man zeige, daß für eine Folge (x_n) in X gilt:
(x_n) ist schwach konvergent gegen $x \in X \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, f \in X' \ : \ f(x_n) \to f(x)$.
(Hintergrundinformation: Die schwache Topologie auf X ist die initiale Topologie auf X bzgl. der Abbildungen $f : X \to \mathbb{K}$ wobei $f \in X'$.)

Definition. Sei (X, τ) ein (beliebiger) topologischer Raum. Eine Folge (x_n) in X heißt konvergent gegen $x \in X$ wenn in jeder Umgebung von x fast alle Folgenglieder liegen, i.e. $\forall\, U \in \mathcal{U}(x) \ \exists\, N \in \mathbb{N}$ sodaß $x_n \in U$ für alle $n \geq N$.
x heißt Häufungspunkt von (x_n) wenn in jeder Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder liegen.

16. Man zeige, daß die Sorgenfrey Linie ein Lindelöf Raum ist.

17. Man zeige, daß $\mathbb{Q}$ (mit der üblichen Topologie) nicht lokal kompakt ist.

18. (**Ordnungstopologie**)
Sei $(X, \leq)$ eine linear geordnete Menge. Für jedes $a \in X$ sei $(\leftarrow, a) = \{x \in X \ : \ x < a\}$ und $(a, \to) = \{x \in X \ : a < x\}$.
Dann ist $\mathcal{S} = \{(\leftarrow, b) \ : \ b \in X\} \cup \{(a, \to) \ : \ a \in X\}$ eine Subbasis für die sogenannte Ordnungstopologie auf X . Man überzeuge sich, daß die Ordnungstopologie auf $\mathbb{N}$ die diskrete Topologie ist, und die Ordnungstopologie auf $\mathbb{R}$ die übliche Topologie ist.
Sei nun $(X, \leq)$ mit der Ordnungstopologie τ versehen und $M \subseteq X$. Man zeige, daß die Spurtopologie $\tau|_M$ feiner ist als die Ordnungstopologie auf M (die Einschränkung von $\leq$ auf M liefert eine induzierte lineare Ordnung auf M) . Man finde ein Beispiel, wo die beiden Topologien verschieden sind (wähle $X = \mathbb{R}$ und M geeignet) .

19. **Definition.** Eine linear geordnete Menge $(X, \leq)$ heißt wohlgeordnet, wenn jede nichtleere Teilmenge von X ein kleinstes Element besitzt.
Unter Anwendung des Wohlordnungssatzes ("Jede Menge kann wohlgeordnet werden") zeige man, daß es eine überabzählbare wohlgeordnete Menge $(X, \leq)$ gibt, wo $(\leftarrow, a)$ für jedes $a \in X$ höchstens abzählbar ist.

Man zeige:

i) jede abzählbare Teilmenge von X hat eine obere Schranke (in X) .

ii) jedes Element $x \in X$ hat einen eindeutig bestimmten Nachfolger ($x \in X$ heißt Limes-Element wenn x keinen Vorgänger besitzt).

iii) Sei τ die Ordnungstopologie auf $(X, \leq)$. Dann ist (X, τ) abzählbar kompakt, aber nicht kompakt. $\{x\}$ ist offen, wenn x einen Vorgänger besitzt. Die Mengen der Form $(a, x] = \{y \in X : a < y \leq x\}$ bilden eine offene Umgebungsbasis für ein Limes-Element x .

20. Es seien $f, g : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ stetige Abbildungen, wobei (Y, σ) ein T_2-Raum ist. Man zeige: i) $A = \{x \in X \ : \ f(x) = g(x)\}$ ist abgeschlossen in (X, τ) .
ii) Sei $f|_D = g|_D$ für eine dichte Teilmenge $D \subseteq X$, dann gilt $f = g$.

21. Sei $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ stetig und (Y, σ) ein T_2-Raum. Dann ist der Graph von f, $G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \ : \ y = f(x)\}$, eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times Y$.

22. Man zeige:
(X, τ) ist ein T_2-Raum $\Leftrightarrow$ $\Delta = \{(x, x) \ : \ x \in X\}$ ist abgeschlossen in $X \times X$.

23. **Definition.** Sei (X, τ) ein topologischer Raum. $G \subseteq X$ heißt *regulär offen* wenn $G = int\overline{G}$. $F \subseteq X$ heißt *regulär abgeschlossen* wenn $F = \overline{intF}$. Die Familie aller regulär offen Mengen von (X, τ) sei mit $RO(X, \tau)$ bezeichnet.
Man zeige:
i) $G \subseteq X$ ist regulär offen $\Leftrightarrow$ $\exists$ eine abgeschlossene Menge A mit $G = intA$.
ii) $F \subseteq X$ ist regulär abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $\exists$ eine offene Menge O mit $F = \overline{O}$.
iii) Die Vereinigung von zwei regulär offenen Mengen ist i.a. nicht regulär offen.
iv) $G \subseteq X$ ist regulär offen $\Leftrightarrow$ $X \setminus G$ ist regulär abgeschlossen.
v) $RO(X, \tau)$ ist Basis für eine gröbere Topologie τ_s auf X , die sogenannte Semiregularisierung von (X, τ) .
vi) (X, τ) heißt semi-regulär, wenn $\tau = \tau_s$. Man weise nach, daß jeder T_3-Raum semi-regulär ist.
vii) (X, τ) ist T_2-Raum $\Leftrightarrow$ (X, τ_s) ist T_2-Raum.
viii) Sei τ die cofinite Topologie auf einer unendlichen Menge X . Dann ist τ_s die indiskrete Topologie.
ix) Sei $O \subseteq X$ offen in (X, τ) . Dann stimmen die abgeschlossenen Hüllen von O bzgl. τ und τ_s überein.

24. Man zeige: Ist jeder offene Teilraum von (X,τ) ein T_4-Raum, dann ist (X,τ) ein vererblich T_4-Raum.

25. Es sei $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ eine Abbildung. Man zeige:
    i) $\exists\ (a_n)\subseteq A\subseteq X$ mit $a_n\to x\in X \quad\Rightarrow\quad x\in\overline{A}$.
    ii) f ist stetig $\quad\Rightarrow\quad [\ (x_n)\to x \quad\Rightarrow\quad f(x_n)\to f(x) \quad \forall\ (x_n)\ ]$
    iii) Wenn (X,τ) ein A_1-Raum ist, dann sind die Aussagen i) und ii) umkehrbar.

26. Sei (X,τ) ein topologischer Raum, (x_n) eine Folge in X und $\mathcal{F}$ der Elementarfilter von (x_n) . Man zeige:
    i) $\mathcal{F}\to x \quad\Leftrightarrow\quad x_n\to x$,
    ii) $x\in\mathrm{Hp}(\mathcal{F}) \quad\Leftrightarrow\quad x$ ist Häufungspunkt von (x_n) .

27. Man zeige:
    (X,τ) ist T_2-Raum $\quad\Leftrightarrow\quad$ jeder Filter auf X konvergiert gegen höchtens einen Punkt.

28. Sei $\mathcal{G}$ der Hauptfilter von $A\subseteq X$. Man zeige:
    $\mathcal{G}$ ist Ultrafilter $\quad\Leftrightarrow\quad |A|=1$.

29. Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X und $f:X\to Y$ eine Abbildung. Man zeige:
    i) $x\in\mathrm{Hp}(\mathcal{F}) \quad\Rightarrow\quad \mathcal{F}\to x$,
    ii) $f(\mathcal{F})$ ist ein Ultrafilter auf Y .

30. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X . Man zeige:
    $\mathcal{F}=\bigcap\{\ \mathcal{U}\ :\ \mathcal{U}$ ist Ultrafilter mit $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{U}\ \}$.

31. Sei $X=\prod_{i\in I}X_i$ versehen mit der Produkttopologie und $i_0\in I$.
    Man zeige, daß X_{i_0} zu einem Teilraum von X homöomorph ist.

32. Man zeige, daß die Projektionsabbildung von einem Produktraum in einen seiner Faktorräume i.a. keine abgeschlossene Abbildung ist.

33. Sei $X=\prod_{i\in I}X_i$ und $A=\prod_{i\in I}A_i=\{x\in X\ :\ x_i\in A_i\ \ \forall\ i\in I\}$, wobei $A_i\subseteq X_i$ für alle $i\in I$. Man zeige:
    i) $\overline{A}=\prod_{i\in I}\overline{A_i}$,
    ii) sind alle A_i abgeschlossen (in X_i) , dann ist A abgeschlossen in X ,
    iii) sind alle A_i dicht (in X_i) , dann ist A dicht in X .

34. i) Seien τ_1 und τ_2 Topologien auf X mit zugehörigen Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$. Es gelte $\forall\ x \in X\ \forall\ B \in \mathcal{B}_i$ mit $x \in B\ \ \exists\ B' \in \mathcal{B}_j$ sodaß $x \in B' \subseteq B$, $i \neq j \in \{1,2\}$. Dann ist $\tau_1 = \tau_2$.

    ii) Man zeige unter Verwendung von i), daß das Produkt von abzählbar vielen metrisierbaren Räumen wieder metrisierbar ist.

35. Sei (X_i, τ_i) ein A_1-Raum für alle $i \in I$. Man zeige:
    $X = \prod_{i \in I} X_i$ ist ein A_1-Raum $\Leftrightarrow$ I ist höchtens abzählbar.

36. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Dann gilt:
    (X, τ) ist abzählbar kompakt $\Leftrightarrow$ jede Folge in X hat einen Häufungspunkt.

37. Sei (X, τ) vollständig regulär, $C \subseteq X$ kompakt, $U \subseteq X$ offen mit $C \subseteq U$.
    Man zeige: es existiert eine stetige Abbildung $f : X \to [0,1]$ mit $f|_C = 1$ und $f|_{X \setminus U} = 0$.

38. Seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Räume, $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ kompakte Teilmengen, und $W \subseteq X \times Y$ eine Umgebung von $A \times B$.
    Man zeige: es existiert eine Umgebung $U \subseteq X$ von A und eine Umgebung $V \subseteq Y$ von B sodaß $U \times V \subseteq W$.

39. Unter Verwendung des Einbettungs-Lemmas zeige man, daß jeder vollständig reguläre Raum (X, τ) eine Kompaktifizierung (Y, σ) mit folgender Eigenschaft besitzt: jede beschränkte reellwertige Funktion auf X kann stetig auf Y fortgesetzt werden.
    ((Y, σ) ist die Stone-Čech Kompaktifizierung von (X, τ))