Differenzierbarkeit reellwertiger Funktionen

Definition. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $x^0 \in D(f)$ ein innerer Punkt.

Dann heißt f **differenzierbar** an x^0 , wenn es einen Vektor $\vec{c} = (c_1, ..., c_n)$ und eine auf einer Umgebung $U(x^0)$ definierte Funktion $f_0(x)$ gibt, sodass

- $f(x) = f(x^0) + \vec{c}(\vec{x} - \vec{x}^0) + \|x - x^0\| f_0(x)$
- $\lim\limits_{x \to x^0} f_0(x) = 0$.

Die lineare Approximation $\widetilde{f}(x) = f(x^0) + \vec{c}(\vec{x} - \vec{x}^0)$ stellt eine Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$ dar. Für $n = 1$ ist dies eine Gerade (die Tangente), für $n = 2$ eine Ebene (die Tangentialebene). Allgemein spricht man von einer Tangentialhyperebene.

Wesentlich ist dabei, dass die Abweichung der linearen Approximation $\widetilde{f}$ von f bei Annäherung an x^0 von höherer als erster Ordnung verschwindet.

Bemerkung. Man kann zeigen, dass der Vektor $\vec{c}$ durch f eindeutig bestimmt ist.

Satz. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an x^0 differenzierbar. Dann existieren alle partiellen Ableitungen, und es gilt

$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = c_k$, i.e. $\vec{c} = \mathrm{grad} f(x^0)$.

Beweis. Laut Voraussetzung gilt

$f(x) = f(x^0) + \vec{c}(\vec{x} - \vec{x}^0) + \|x - x^0\| f_0(x)$.

Setzen wir $x = x^0 + h\vec{e}_k$, dann ist $\vec{c}(\vec{x} - \vec{x}^0) = hc_k$ und $\|x - x^0\| = |h|$.

Weiters ist $\left| \frac{f(x^0 + h\vec{e}_k) - f(x^0)}{h} - c_k \right| = \left| f_0(x^0 + h\vec{e}_k) \right|$. Mit $h \to 0$ erhalten wir daraus $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = c_k$. $\square$

Bemerkung. Aus der Existenz aller partiellen Ableitungen folgt i.a. **nicht** die Differenzierbarkeit (d.h. obiger Satz ist i.a. nicht umkehrbar).

Durch den Gradienten von f wird eine Richtung im $\mathbb{R}^n$ festgelegt. In welcher Beziehung diese Richtung zur Änderung von f steht, zeigt folgender

Satz. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an x^0 differenzierbar. Dann ist f an x^0 in jeder Richtung $\vec{a}$ (mit $\|\vec{a}\| = 1$) differenzierbar und es gilt

(i) $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0) = (\text{grad} f(x^0)) \cdot \vec{a}$,

(ii) $\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0)\right| \leq \|\text{grad} f(x^0)\|$.

Beweis. Laut Voraussetzung gilt auf einer Umgebung $U(x^0)$

$f(x) = f(x^0) + \text{grad} f(x^0)(\vec{x} - \vec{x}^0) + \|x - x^0\| f_0(x)$.

Mit $x = x^0 + h\vec{a}$ und folglich $\|x - x^0\| = |h|$ gilt dann

$\left|\frac{f(x^0+h\vec{a})-f(x^0)}{h} - \text{grad} f(x^0) \cdot \vec{a}\right| = \left|f_0(x^0 + h\vec{a})\right|$.

Mit $h \to 0$ folgt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung ergibt sich durch Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. $\square$

Bemerkung. Aus der zweiten Aussage des obigen Satzes wird ersichtlich, dass der Gradient von f jene Richtung angibt, in der die Änderung von f maximal ist. Dies ist etwa insofern von Bedeutung, wenn f ein Temperaturfeld beschreibt. Dann gibt der Gradient die Richtung des Wärmestromes an, da Wärme stets in Richtung des größten Temperaturgefälles fließt.

Satz. (ohne Beweis)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an x^0 differenzierbar. Dann gilt

(i) $\exists\ M > 0$ und eine Umgebung $U(x^0)$, auf der gilt

$|f(x) - f(x^0)| \leq M\|x - x^0\|$,

(ii) f ist stetig an x^0 .

Wie wir bereits wissen, ist die bloße Existenz der partiellen Ableitungen nicht hinreichend fr die Stetigkeit. Erst die zusätzliche Voraussetzung der Beschränktheit der partiellen Ableitungen (auf einer Umgebung von x^0) garantiert die Stetigkeit.

Welche zusätzliche Forderung an die partiellen Ableitungen garantiert die Differenzierbarkeit ?

Satz. (ohne Beweis)
Existieren für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf einer Umgebung $U(x^0)$ die partiellen Ableitungen $f_{x_1}, f_{x_2}, ..., f_{x_n}$ und sind diese **stetig** an x^0 , dann ist f differenzierbar an x^0 .

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = \sin(xyz)$. Dann sind $f_x = yz\cos(xyz)$, $f_y = xz\cos(xyz)$, $f_z = xy\cos(xyz)$ stetig in jedem (x, y, z) . Somit ist f differenzierbar in jedem x^0 .