Differenzierbarkeit vektorwertiger Funktionen

Definition. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $x^0 \in D(f)$ ein innerer Punkt.

Dann heißt $f = (f_1, ..., f_m)$ **differenzierbar** an x^0 , wenn es eine $m \times n$ Matrix $C = (c_{\mu\nu})$ und eine auf einer Umgebung $U(x^0)$ definierte Funktion $f_0(x)$ (mit Werten in $\mathbb{R}^m$) gibt, sodass

- $f(x) = f(x^0) + C(\vec{x} - \vec{x}^0) + \|x - x^0\| f_0(x)$
- $\lim\limits_{x \to x^0} f_0(x) = \vec{0}$.

Bemerkung.

(i) Differenzierbarkeit heißt also, dass

$\frac{1}{\|x-x^0\|}\big(f(x) - f(x^0) - C(\vec{x} - \vec{x}^0)\big) \to \vec{0}$ für $x \to x^0$.

(ii) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann differenzierbar an x^0 , wenn jede Koordinatenfunktion $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar an x^0 ist.

(iii) Falls $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar an x^0 ist, dann ist

$c_{\mu\nu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(x^0)$.

Definition. Existieren für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an einer Stelle x^0 die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(x^0)$, dann heißt die Matrix

$$J_f(x^0) = \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(x^0)\right) = \frac{\partial(f_1,f_2,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \frac{df}{dx}(x^0) = f'(x^0)$$

die **Jacobi-Matrix**, **Funktionalmatrix** oder **Ableitung** von f .

Die Zeilenvektoren der Jacobi-Matrix sind also die Gradienten der jeweiligen Koordinatenfunktionen.

Satz. (Lipschitz-Bedingung für differenzierbare Funktionen)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Existiert für $x^0 \in D(f)$ die Jacobi-Matrix, dann gibt es ein $\delta > 0$ und eine Schranke M , sodass für alle x mit $\|x - x^0\| < \delta$ gilt, dass $\|f(x) - f(x^0)\| \le M\|x - x^0\|$.

Beweis. Unter Verwendung der euklidischen Metrik sowie der vorher gezeigten Lipschitz-Bedingung für reellwertige Funktionen folgt :

$$\|f(x) - f(x^0)\| = \sqrt{\sum_{\mu=1}^{m} \left(f_\mu(x) - f_\mu(x^0)\right)^2}$$

$$\le \sqrt{\sum_{\mu=1}^{m} M_\mu^2}\, \left\|x - x^0\right\| = M \left\|x - x^0\right\| \quad \square$$

Beispiele.

1) Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_1(x, y) = x(1-y)$, $f_2(x, y) = xy$ besitzt die Jacobi-Matrix

$$J_f = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ y & x \end{pmatrix} .$$

2) Die Polarkoordinatenabbildung $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit
$P_1(r, \varphi) = r\cos\varphi$, $P_2(r, \varphi) = r\sin\varphi$ besitzt die Jacobi-Matrix

$$J_P = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} .$$

Satz. (Ableitungsregeln)

1) Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an einem inneren Punkt x^0 von $D(f)$ bzw. $D(g)$ differenzierbar, und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Dann ist auch die Funktion $\lambda f + \mu g$ an x^0 differenzierbar und es gilt

$$J_{\lambda f + \mu g}(x^0) = \lambda J_f(x^0) + \mu J_g(x^0) .$$

2) Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an einem inneren Punkt x^0 von $D(f)$ bzw. $D(g)$ differenzierbar.

Dann ist auch die (reellwertige) Funktion $f * g = \sum_{i=1}^{m} f_i g_i$ an x^0 differenzierbar und es gilt

$$(f * g)' = \mathrm{grad}(f * g) = {}^t(f') \cdot g + f \cdot {}^t(g') = {}^t(J_f) \cdot g + f \cdot {}^t(J_g) =$$
$$\sum_{i=1}^{m} \left((\mathrm{grad} f_i) g_i + f (\mathrm{grad} g_i)\right) .$$

Satz. (**Kettenregel**)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an einem inneren Punkt $x^0 \in D(f)$ differenzierbar und $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ an $y^0 = f(x^0) \in D(g)$ differenzierbar (wobei y^0 ein innerer Punkt von $D(g)$ sei).

Dann ist $h = g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ an x^0 differenzierbar und es gilt

$$J_h(x^0) = J_g(y^0) J_f(x^0) \quad \text{bzw.} \quad \tfrac{dh}{dx}(x^0) = \tfrac{dg}{dy}(y^0) \tfrac{df}{dx}(x^0) .$$

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Dann ist $\varphi = f \circ \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $J_f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$, und

$J_\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1'(t) \\ \psi_2'(t) \\ .... \\ \psi_n'(t) \end{pmatrix}$. Nach der Kettenregel ist dann

$$J_\varphi(t) = \varphi'(t) = J_f(\psi(t)) J_\psi(t) = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\partial f}{\partial x_i} \left(\psi(t)\right) \psi_i'(t) =$$

$$= \tfrac{\partial f}{\partial x_1} \left(\psi(t)\right) \psi_1'(t) + \tfrac{\partial f}{\partial x_2} \left(\psi(t)\right) \psi_2'(t) + ... + \tfrac{\partial f}{\partial x_n} \left(\psi(t)\right) \psi_n'(t)$$