

# Ableitung höherer Ordnung

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  können ihrerseits wieder (auf gewissen Teilmengen ihres Definitionsbereiches) differenzierbar sein.

Wir nennen dann die Funktionen  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$  **partielle Ableitungen zweiter Ordnung**. Dabei wird auch die Schreibweise  $f_{x_i x_k}$  verwendet.

Rekursiv können dann (falls existent) die Ableitungen höherer Ordnung definiert werden.

**Definition.** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Wenn für  $l = 0, 1, 2, \dots, k$  auf einer Menge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  alle partiellen Ableitungen  $l$ -ter Ordnung von  $f$  existieren und dort stetig sind, heißt  $f$   **$k$ -mal stetig differenzierbar auf  $X$**  und man schreibt  $f \in C^k(X)$ .

## Beispiele.

(i)  $f(x, y) = x^y$  ist auf  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$  definiert und besitzt dort die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(1 + y \ln x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = x^{y-1}(1 + y \ln x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y (\ln x)^2.$$

Man beachte, dass hier  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  gilt.

(ii) Sei  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{wenn } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{wenn } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .

Dann gilt  $f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$  und  $f_y(0, 0) = 0$ .

Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  gilt  $f_x(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$ ,  $f_y(x, y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$ .

Daraus erhalten wir  $f_{xy}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = -1$  und  $f_{yx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = +1$ .

Also existieren zwar  $f_{xy}(0,0)$ ,  $f_{yx}(0,0)$ , aber  $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ .

Für  $(x,y) \neq (0,0)$  gilt hingegen

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{(x^2 - y^2)(x^4 + 10x^2y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Bei Annäherung an  $(0,0)$  entlang der Geraden  $y = x$  erhalten wir als Richtungsgrenzwert für  $f_{xy}$  und  $f_{yx}$  den Wert 0, im Gegensatz zu oben ermittelten Werten  $f_{xy}(0,0) = -1$  bzw.  $f_{yx}(0,0) = +1$ , d.h.  $f_{xy}$  und  $f_{yx}$  sind im Ursprung **nicht** stetig.

**Satz.** (ohne Beweis)

Für  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  seien  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$  und  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}$  stetig an  $x^0$ .

Dann gilt  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x^0)$ .

**Bemerkung.** Für  $C^k$ -Funktionen sind die Ableitungen bis zur  $k$ -ten Ordnung vertauschbar, weil jede Permutation der dabei beteiligten Variablen durch endlich viele spezielle Permutationen, bei denen nur zwei aufeinanderfolgende Elemente vertauscht werden, darstellbar ist.

Mit Hilfe der (partiellen) Ableitungen höherer Ordnung lassen sich sogenannte **Differentialoperatoren** bilden.

Dazu benötigen wir den Begriff des Polynoms mehrerer Veränderlicher. Dabei ist ein **Polynom in  $n$  Variablen** eine Abbildung  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  der Form

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1=1}^{r_1} \sum_{k_2=1}^{r_2} \dots \sum_{k_n=1}^{r_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}.$$

Die Koeffizienten  $a_{k_1 k_2 \dots k_n}$  sind dabei Konstante, und die größte auftretende Exponentensumme heißt der Grad von  $P$ .

Ersetzen wir nun in einem derartigen Polynom die Variablen  $x_i$  durch die

Ableitungsoperatoren  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ , dann erhalten wir einen sog. linearen Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten

$$L_P = \sum_{k_1=1}^{r_1} \sum_{k_2=1}^{r_2} \dots \sum_{k_n=1}^{r_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} \cdot$$

Dabei ist  $L_P : C^p(X) \rightarrow C(X)$ , wobei  $p$  den Grad des Differentialoperators bezeichnet.

Der wichtigste derartige Differentialoperator ist der **Laplace-Operator**

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \cdot$$

### Beispiele.

1) Die Wellen- oder Schwingungsgleichung

$$\Delta \Psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad c > 0 \dots \text{Ausbreitungsgeschwindigkeit}$$

für eine orts- und zeitabhängige Funktion  $\Psi$ . Die Wellengleichung ist eine zentrale Gleichung in der Elektrodynamik.

2) Die Wärmeleitungsgleichung bzw. Diffusionsgleichung

$$\Delta \Psi = \frac{1}{k} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad k > 0$$

tritt etwa bei der Wärmeleitung in homogenen Medien, der Diffusion oder beim Elektrizitätstransport auf.

3) Die Schrödinger-Gleichung

$$\Delta \Psi - \frac{2m}{\hbar^2} V \Psi = -\frac{2im}{\hbar} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

ist die zentrale Gleichung der nichtrelativistischen Quantenmechanik. Dabei ist  $V$  (das Potential) nur eine Funktion des Ortes.