Extrema unter Nebenbedingungen

Häufig sucht man die Extremwerte einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unter eingeschränkten Bedingungen für die Variablen $x_1, x_2, ..., x_n$.

Beispiel. Man bestimme die Extrema von $f(x,y) = \cos^2 x - 2\sin^2 y$, wobei $y - x = \frac{\pi}{2}$.

Die entsprechende Auskunft gibt der folgende

Satz. (**Lagrange'sche Multiplikatorregel**)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf einer offenen Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$, und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar auf X , wobei der Rang von J_g gleich m sei.

Hat unter diesen Voraussetzungen f an x^0 ein Extremum, wobei nur jene $x \in X$ betrachtet werden, für die $g(x) = 0$ ist, dann gibt es Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ sodass

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x^0) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial x_\nu}(x^0) = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, ..., n \ .$$

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ heißen **Lagrange'sche Parameter** bzw. auch **Lagrange'sche Multiplikatoren** .

Bemerkung. Die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ beschreibt dabei die m **Nebenbedingungen** $g_1, g_2, ..., g_m$.

Zur praktischen Berechnung.

Gegeben seien also $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und des weiteren die m Nebenbedingungen $g_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, ..., g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Man bilde die Funktion

$$F(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, ..., x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, ..., x_n) + ... + \lambda_m g_m(x_1, ..., x_n)$$

mit den $n + m$ Unbekannten $x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m$.

Die mögliche Extremalstelle x^0 ergibt sich dann aus dem System der $n+m$ Gleichungen

$$g_l(x^0) = 0 \quad \text{für} \quad l = 1, 2, ..., m$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x^0) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial x_\nu}(x^0) = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, ..., n \ ,$$

also aus den Gleichungen

$$F_{\lambda_1} = 0 \ , \ ... \ , \ F_{\lambda_m} = 0 \quad \text{sowie} \quad F_{x_1} = 0 \ , \ ... \ , \ F_{x_m} = 0 \ .$$

Beispiel. Ein Kegelvolumen $V(r,H) = \frac{r^2\pi H}{3}$ soll unter der Nebenbedingung $g(r,H) = r^2 + H^2 - 2RH = 0$ (R ... fest) maximal werden.

Wir betrachten $F(r,H,\lambda) = V + \lambda g = \frac{r^2\pi H}{3} + \lambda(r^2 + H^2 - 2RH)$.

Damit erhalten wir die Gleichungen

$$F_\lambda = r^2 + H^2 - 2RH = 0$$

$$F_r = \frac{2\pi}{3} rH + \lambda 2r = 0$$

$$F_H = \frac{\pi}{3} r^2 + \lambda(2H - 2R) = 0$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\lambda = -\frac{\pi}{3}H$, eingesetzt in die dritte Gleichung erhalten wir $r^2 = 2H(H-R)$.

Unter Berücksichtigung der ersten Gleichung erhalten wir nun $H = \frac{4}{3}R$ und $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$.