Exakte Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung in expliziter Form kann auch in der Form

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (*)$

geschrieben werden. Diese Darstellung heißt auch die **symmetrische Darstellung** und bedeutet

$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ falls $y = y(x)$ bzw.

$P(x, y)x' + Q(x, y) = 0$ falls $x = x(y)$.

Die Schreibweise $(*)$ kann auch als Integrand eines Linienintegrals über die Vektorfunktion $\vec{v} = (P(x, y), Q(x, y))$ aufgefasst werden. Diese Vektorfunktion besitzt ein Potential bzw. eine **Stammfunktion** $F(x, y)$, wenn $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$ gilt.

Der Integrand besitzt in diesem Fall die Form $dF = F_x dx + F_y dy$. Ist F darüberhinaus zweimal stetig differenzierbar, dann gilt wegen $F_{xy} = F_{yx}$ auch, dass $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (**Integrabilitätsbedingungen**).

Sei nun $F(x, y)$ eine Stammfunktion von $\vec{v}$. Der Graph von F ist dann eine Fläche im $\mathbb{R}^3$. Der Ausdruck $F(x, y) = C$ stellt dann (zumindest lokal) eine implizit definierte Funktion $y(x)$ (bzw. $x(y)$) dar.

Differenzieren wir die Gleichung $F(x, y(x)) = C$ nach x , erhalten wir $F_x + F_y y' = 0$. Weil $F_x = P$ und $F_y = Q$ ist, erhalten wir die ursprüngliche Differentialgleichung und die Kurvenschar $F(x, y) = C$ als ihre allgemeine Lösung. (Analoges gilt für den Fall $F(x(y), y) = C$)

Definition. Eine Differentialgleichung $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ heißt **exakt** bzw. **total**, wenn für sie eine Stammfunktion existiert.

Satz. Seien $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ stetig differenzierbar auf einem sog. einfach zusammenhängenden Gebiet G (z.B. einer Kreisscheibe). Dann gilt

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ ist exakt auf G $\Leftrightarrow$

$$P_y = Q_x \quad \text{auf} \quad G \quad \text{(Integrabilitätsbedingungen sind erfüllt)}$$

In diesem Fall ist dann $F(x,y) = C$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Beispiel. Betrachte $3x^2ydx + (x^3 + 2y)dy = 0$.

Dann ist $P(x,y) = 3x^2y$ und $Q(x,y) = x^3 + 2y$. Offenbar gilt $P_y = 3x^2 = Q_x$, also ist die Differentialgleichung exakt.

Wie wird nun die Stammfunktion $F(x,y)$ bestimmt, für welche ja $F_x = P$ und $F_y = Q$ gilt?

(i) Wir starten mit der Bedingung $F_x = P$, i.e. $F_x = 3x^2y$. Integration nach x liefert $F(x,y) = x^3y + \varphi(y)$, wobei $\varphi(y)$ eine beliebige Funktion von y bezeichnet.

Die Auswertung von $F_y = Q$ liefert nun $x^3 + \varphi'(y) = x^3 + 2y$, also $\varphi'(y) = 2y$ bzw. $\varphi(y) = y^2$.

Damit ist $F(x,y) = x^3y + y^2 = C$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(ii) Startet man mit $F_y = Q$, dann ergibt Integration nach y , dass $F(x,y) = x^3y + y^2 + \psi(x)$.

Die Auswertung von $F_x = P$ ergibt hier $3x^2y + \psi'(x) = 3x^2y$, also $\psi'(x) = 0$ bzw. $\psi(x) = 0$.

Damit ist auch hier $F(x,y) = x^3y + y^2 = C$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

In der Regel ist allerdings zu erwarten, dass eine Differentialgleichung $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ **nicht** exakt ist, z.B. ist $ydx + x^2dy = 0$ nicht exakt.

Multiplizieren wir die gegebene Differentialgleichung mit einer Funktion $M(x,y) \neq 0$, dann erhalten wir eine neue Differentialgleichung

$$(M(x,y)P(x,y))dx + (M(x,y)Q(x,y))dy = 0 \ ,$$

welche dieselbe Lösungsmenge besitzt.

Wir fragen uns nun, wie so ein "Multiplikator" beschaffen sein muß, damit die neue Differentialgleichung exakt ist. In diesem Fall heißt $M(x,y)$ ein **integrierender Faktor** bzw. **Eulerscher Multiplikator** .

Dazu müssen die neuen Funktionen $\widetilde{P}(x,y) = M(x,y)P(x,y)$ und $\widetilde{Q}(x,y) = M(x,y)Q(x,y)$ die Integrabilitätsbedingungen erfüllen, i.e. es muß $\widetilde{P}_y = \widetilde{Q}_x$ gelten. Dies bedeutet

$$M_yP + MP_y = M_xQ + MQ_x \quad \text{bzw.}$$
$$M_xQ - M_yP + (Q_x - P_y)M = 0 \ .$$

Dies stellt eine lineare partielle Differentialgleichung für die gesuchte Funktion $M(x,y)$ dar, deren Lösung im allgemeinen schwieriger als die der Ausgangsgleichung ist.

Spezielle Multiplikatoren $M(x,y)$ existieren z.B. in folgenden Fällen, wobei wir $\frac{M'}{M} = G$ setzen.

(a) $M = M(x)$ wenn $\frac{P_y - Q_x}{Q} = G(x)$.

In diesem Fall ist dann $M(x) = e^{\int G(x)dx}$.

(b) $M = M(y)$ wenn $\frac{Q_x - P_y}{P} = G(y)$.

In diesem Fall ist dann $M(y) = e^{\int G(y)dy}$.

(c) $M = M(x+y)$ wenn $\frac{Q_x - P_y}{P - Q} = G(x+y)$.

(d) $M = M(xy)$ wenn $\frac{P_y - Q_x}{yQ - xP} = G(xy)$.

(e) $M = M(\frac{x}{y})$ wenn $\frac{P_y - Q_x}{Q}x^2 = G(\frac{x}{y})$.

(f) $M = M(x^2+y^2)$ wenn $\frac{P_y - Q_x}{2(xQ - yP)} = G(x^2+y^2)$.

Beispiel. Betrachte $dx - x\cot y dy = 0$.

Hier ist $P(x,y) = 1$ und $Q(x,y) = -x\cot y$. Weil $P_y = 0$ und

$Q_x = -\cot y$ ist, ist die Differentialgleichung nicht exakt.

Allerdings ist $\frac{Q_x - P_y}{P} = -\cot y$ ($\frac{Q_x - P_y}{P}$ ist also eine Funktion **nur** von y) und damit ist

$M(y) = e^{\int -\cot y dy} = \frac{1}{\sin y}$ ein Multiplikator.

Also ist die Differentialgleichung $\frac{1}{\sin y} dx - x \frac{\cos y}{\sin^2 y} dy$ exakt.

Mit $F_x = \frac{1}{\sin y}$ folgt $F(x,y) = \frac{x}{\sin y} + \varphi(y)$.

Wegen $F_y = \widetilde{Q}$ gilt $-x\frac{\cos y}{\sin^2 y} + \varphi'(y) = -x\frac{\cos y}{\sin^2 y}$, bzw. $\varphi'(y) = 0$ und $\varphi(y) = 0$ (bzw. $\varphi(y) = \widehat{C}$) .

Insgesamt ist damit $F(x,y) = \frac{x}{\sin y} = C$ die Lösung der Differentialgleichung.