Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

I. Grundlegendes

• Eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung besitzt die Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

• Eine inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung besitzt die Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

• Die Funktionen $a_{n-1}(x), ..., a_1(x), a_0(x)$ und $f(x)$ seien dabei **stetig** auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

• Zu jeder inhomogenen linearen Differentialgleichung können wir die zugeordnete homogene lineare Differentialgleichung betrachten.

Beispiel. $y''' + x^3y'' - \cos xy' + (x^2-1)y = e^x$ ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung.

Die zugeordnete homogene Differentialgleichung ist $y''' + x^3y'' - \cos xy' + (x^2-1)y = 0$.

Bemerkung. Obige Differentialgleichungen können auch mittels des Differentialoperators

$$L = \tfrac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\tfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + a_1\tfrac{d}{dx} + a_0$$

in der Form $L[y] = f$ bzw. $L[y] = 0$ geschrieben werden.

Der Differentialoperator L selbst ist dabei eine **lineare** Abbildung vom Vektorraum der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Intervall I in den Vektorraum der stetigen Funktionen auf I .

Wie man sich leicht überzeugt, gilt nämlich

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] \quad \text{sowie} \quad L[\lambda y] = \lambda L[y] \quad .$$

Die Lösungsgesamtheit der homogenen Differentialgleichung $L[y] = 0$ ist damit der **Kern von** L und folglich ein Untervektorraum des Raumes der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen.

Gelte $L[y_1] = f$ und $L[y_2] = f$ (i.e. y_1 und y_2 sind Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung). Dann ist $L[y_1 - y_2] = 0$, i.e. $y_1 - y_2$ ist eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

Satz.

1) Die Gesamtheit der reellwertigen (bzw. komplexwertigen) Lösungen von $L[y] = 0$ ist ein n-dimensionaler (!) Vektorraum über $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) .

2) Die Gesamtheit der reellwertigen (bzw. komplexwertigen) Lösungen von $L[y] = f$ ist ein n-dimensionaler affiner Raum über $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$), i.e. kann beschrieben werden durch die allgemeine Lösung y_H von $L[y] = 0$ **plus** eine spezielle (**partikuläre**) Lösung y_p von $L[y] = f$.

Also $y = y_H + y_p$.

Bemerkung. Um die Lösungsgesamtheit von $L[y] = 0$ zu bestimmen, müssen wir also eine **Basis** des Lösungsraumes bestimmen, i.e. n linear unabhängige Lösungen. Diese heißen auch ein **Fundamentalsystem** von Lösungen. Eine beliebige Lösung läßt sich dann als Linearkombination der Fundamentallösungen darstellen.

Beispiel. Betrachte $y'' - y' - 2y = 0$. Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung.

Wir stellen fest (siehe auch später), dass $y_1(x) = e^{2x}$ und $y_2(x) = e^{-x}$ zwei linear unabhängige Lösungen sind.

Damit ist die Lösungsgesamtheit gegeben durch

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \quad , \; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \; .$$

Ohne Beweis sei noch die folgende Aussage angeführt.

Satz. (**Existenz- und Eindeutigkeitssatz**)

Das Anfangswertproblem

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

$$y(x_0) = b_0 \ , \ y'(x_0) = b_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}$$

ist eindeutig lösbar.

Beispiel. Betrachte $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Die allgemeine Lösung (siehe vorher) ist $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$.

Die Bedingung $y(0) = 1$ liefert $1 = C_1 + C_2$.

$y'(x) = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x}$. $y'(0) = 1$ liefert damit $1 = 2C_1 - C_2$.

Daraus folgt $C_1 = \frac{2}{3}$ und $C_2 = \frac{1}{3}$.

Somit ist $y(x) = \frac{2}{3}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{-x}$ die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems.

II. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Die Bestimmung eines Fundamentalsystems von Lösungen für die homogene Differentialgleichung $L[y] = 0$ ist i.a. schwierig, wenn die Koeffizienten $a_{n-1}(x), ..., a_1(x), a_0(x)$ beliebige Funktionen sind.

Wir betrachten nun den wichtigen Spezialfall, dass die Koeffizienten **Konstante** sind, i.e.

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \text{und} \quad a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{R} \ .$$

Wir verwenden den Ansatz $y = e^{\lambda x}$ (und damit $y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$) , um Lösungen zu gewinnen.

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = 0 \ .$$

Weil $y = e^{\lambda x}$ auf I aber nicht Null ist, muß das sogenannte **charakter-**

istische Polynom

$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ Null sein.

Bemerkungen.

(i) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von $P(\lambda)$, dann ist $y = e^{\lambda x}$ eine Lösung von $L[y] = 0$.

(ii) Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ n **verschiedene** Nullstellen von $P(\lambda)$, dann sind die Funktionen $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ linear unabhängig, bilden also ein Fundamentalsystem.

(iii) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $P(\lambda)$, dann auch $\overline{\lambda}$ (weil $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$) und $e^{\lambda x}$ sowie $e^{\overline{\lambda} x}$ sind komplexwertige Lösungen. Damit ist auch jede Linearkombination von $e^{\lambda x}$ und $e^{\overline{\lambda} x}$ eine Lösung.

Sei $\lambda = \alpha + i\beta$. Wegen $\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \cos t$, $\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \sin t$ und $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x}$ erhalten wir zwei linear unabhängige **reellwertige** Lösungen

$e^{\alpha x}\cos\beta x$ und $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Dieselben Lösungen erhalten wir durch Verwendung von $\overline{\lambda}$.

Im allgemeinen Fall werden mehrfache Nullstellen von $P(\lambda)$ auftreten.

Dabei gilt:

1) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine k-fache Nullstelle von $P(\lambda)$, dann erhalten wir k linear unabhängige Lösungen

$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$ von $L[y] = 0$.

2) Ist $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ eine k-fache Nullstelle von $P(\lambda)$, dann erhalten wir $2k$ linear unabhängige Lösungen

$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$

$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Bemerkung. Insgesamt erhalten wir dadurch n linear unabhängige Lösungen, also ein Fundamentalsystem.

Beispiel. Das charakteristische Polynom einer homogenen linearen Differentialgleichung 7. Ordnung habe die Nullstellen $\lambda_1 = -1$ (3-fach) und $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$ (je 2-fach).

Dann bilden die Funktionen

$$e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}, e^x\cos 2x, e^x\sin 2x, xe^x\cos 2x, xe^x\sin 2x$$

ein Fundamentalsystem.

Die allgemeine Lösung von $L[y] = 0$ ist somit

$$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x} + C_4e^x\cos 2x +$$

$$+C_5e^x\sin 2x + C_6xe^x\cos 2x + C_7xe^x\sin 2x \quad , \quad C_1, \ldots, C_7 \in \mathbb{R}$$