Variation der Konstanten, Wronsky Determinante

Wir betrachten zunächst eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \; .$$

Des weiteren seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear unabhängige Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung (also ein Fundamentalsystem).

Um die allgemeine Lösung der gegebenen Gleichung anzugeben, benötigen wir eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Dazu treffen wir den Ansatz

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \qquad (\textbf{Variation der Konstanten})$$

mit noch zu bestimmenden Funktionen $C_1(x), C_2(x)$.

Differentiation liefert

$$y_p'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x) \; .$$

Fordern wir nun, dass $C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x) = 0$ sein soll, dann erhalten wir

$$y_p'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) \; .$$

Durch Differentiation dieser Gleichung ergibt sich

$$y_p''(x) = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) \; .$$

Einsetzen in die Gleichung $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ liefert

$C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2'' + a_1(C_1y_1' + C_2y_2') + a_0(C_1y_1 + C_2y_2) = f$ bzw.

$C_1(y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1) + C_2(y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f$, also

$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f$.

Die beiden Gleichungen $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$ und $C_1'y_1' + C_2'y_2' = f$ stellen ein lineares Gleichungssystem für die Funktionen C_1' und C_2' dar.

Durch Anwendung der Cramer'schen Regel und der Setzung $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$ (Wronski Determinante) erhalten wir

$$C_1'(x) = -\tfrac{y_2(x)f(x)}{W(x)} \quad \text{und} \quad C_2'(x) = \tfrac{y_1(x)f(x)}{W(x)} \ ,$$

woraus durch Integration $C_1(x)$ und $C_2(x)$ gewonnen werden können, und in weiterer Folge $y_p(x)$.

Dieses Verfahren kann folgendermaßen verallgemeinert werden:

Satz. (**Variation der Konstanten**)

Sei $L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ gegeben. Weiters sei $y_1(x), \dots y_n(x)$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

Dann ist $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + \dots + C_n(x)y_n(x)$ eine partikuläre Lösung von $L[y] = f$, wobei die Funktionen $C_1(x), \dots, C_n(x)$ gegeben sind durch

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Die obige Matrix $Y(x)$ heißt **Fundamentalmatrix** bzgl. des Fundamentalsystems $y_1(x), \dots y_n(x)$.

Beispiel. Betrachte $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

Ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung wird durch $y_1(x) = e^{2x}$ und $y_2(x) = e^x$ gebildet. Weiters ist $f(x) = e^x$.

Mit vorher ist $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = -e^{3x}$ und

$C_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)} = -\frac{e^x e^x}{-e^{3x}} = e^{-x}$, also $C_1(x) = -e^{-x}$ und

$C_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} = \frac{e^{2x}e^x}{-e^{3x}} = -1$, also $C_2(x) = -x$.

Als partikuläre Lösung für die inhomogene Differentialgleichung erhalten wir damit

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = -e^{-x}e^{2x} - xe^x = -e^x(1+x) \; .$$

Seien nun n Lösungen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ der linearen homogenen Differentialgleichung $L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ gegeben.

Diese sind linear unabhängig auf einem Intervall I , wenn die Gleichung

$$\lambda_1 y_1(x) + \ldots + \lambda_n y_n(x) = 0 \quad \forall \, x \in I$$

nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ erfüllt werden kann.

Fortwährende Differentiation der obigen Gleichung liefert das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 y_1(x) + \ldots + \lambda_n y_n(x) = 0 \\
&\lambda_1 y_1'(x) + \ldots + \lambda_n y_n'(x) = 0 \\
&\qquad \vdots \\
&\lambda_1 y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x) = 0
\end{aligned}$$

Dieses besitzt nur dann als einzige Lösung die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix,

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = Y(x)$$

d.h. der Fundamentalmatrix, auf ganz I nicht 0 ist.

Definition. Die Determinante der Fundamentalmatrix

$$W(x) = \det Y(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

heißt **Wronski-Determinante**.

Wir zeigen nun für den Fall $n = 2$, dass die Wronski-Determinante auf einem Intervall I entweder Null oder überall von Null verschieden ist, falls die Koeffizienten der normierten Differentialgleichung (also mit $a_n = 1$) stetig sind.

Seien also $y_1(x)$, $y_2(x)$ Lösungen von $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, i.e.

$$y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0 \quad \text{und} \quad y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = 0 \ .$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $y_2(x)$, die zweite Gleichung mit $y_1(x)$ und subtrahieren die beiden Gleichungen, dann erhalten wir

$$(y_1''y_2 - y_2''y_1) + a_1(x)(y_1'y_2 - y_2'y_1) = 0 \ .$$

Nun ist $y_1''y_2 - y_2''y_1 = (y_1'y_2 - y_2'y_1)' = -W'(x)$ und $y_1'y_2 - y_2'y_1 = -W(x)$.

Also ergibt sich $W'(x) + a_1(x)W(x) = 0$ und folglich

$$W(x) = Ce^{-\int a_1(x)dx} \ .$$

Da die Exponentialfunktion bei stetigem $a_1(x)$ nie Null auf I ist, ist die Wronski-Determinante entweder identisch Null auf I (Fall $C = 0$) oder überall ungleich Null (Fall $C \neq 0$). Damit ist die Behauptung bewiesen.

Dieses Ergebnis kann auf folgende Art und Weise verallgemeinert werden.

Satz. Seien $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ Lösungen der Differentialgleichung

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \ ,$$

wobei die Koeffizienten auf dem Intervall I stetig sind.

Dann gilt $W(x) = Ce^{-\int a_{n-1}(x)dx}$ auf I .

Folgerung. n Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung (mit stetigen Koeffizienten) sind auf einem Intervall I linear unabhängig, wenn die Wronski-Determinante an **einem** Punkt $x_0 \in I$ von Null verschieden ist.