Systeme von Differentialgleichungen

In vielen Problemen der mathematischen Physik (z.B. gekoppelte Pendel, Bewegungen von Teilchen unter Kräften) treten Systeme von (miteinander gekoppelten) gewöhnlichen Differentialgleichungen auf.

Die allgemeine Form eines Systems 1. Ordnung in expliziter Darstellung lautet

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1(t) &= f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\
\dot{y}_2(t) &= f_2(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\
&\vdots \\
\dot{y}_n(t) &= f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t))
\end{aligned}$$

mit den gesuchten Funktionen $y_1(t), \dots, y_n(t)$.

Dieses System kann in vektorieller Schreibweise auch geschrieben werden mittels

$$\dot{\vec{y}}(t) = \vec{F}(t, \vec{y}(t)) \quad , \quad \text{wobei} \quad \vec{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)) \ .$$

Bemerkung. Auch hier gelten unter analogen Voraussetzungen für die Vektorfunktion $\vec{F}$ analoge Aussagen wie im skalaren Fall (Picard-Lindelöf, Peano).

Definition. Ein **lineares System** 1. Ordnung hat die Form

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\
\dot{x}_2(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t)
\end{aligned}$$

bzw. vektoriell

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t) \ .$$

Für $\vec{b}(t) \equiv 0$ liegt ein **homogenes** System vor, anderenfalls heißt das System **inhomogen**.

Bemerkung. Die Differentialgleichung

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$$

läßt sich mit den neuen Variablen

$$x_1(t) = y(t)\ ,\ x_2(t) = y'(t)\ ,\ \dots\ , x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$$

als System schreiben, nämlich in der Form

$$\dot{x}_1(t) = y'(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = y''(t) = x_3(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = y^{(n)}(t) = -a_0(t)x_1 - a_1(t)x_2 - \ldots - a_{n-1}x_n(t) + f(t)$$

bzw. in der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Die Lösungen eines linearen homogenen Systems 1. Ordnung bilden wiederum einen Vektorraum der Dimension n über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

Satz. Sind die $a_{ij}(t)$ und die $b_j(t)$ **stetige** Funktionen auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t) \quad , \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

für jedes $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung.

Weitere Bemerkungen.

• Jede Lösung des inhomogenen Systems kann als Summe einer geeigneten Lösung des homogenen Systems und einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems dargestellt werden.

• Bilden $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ ein Fundamentalsystem, dann kann daraus die **Fundamentalmatrix** $X(t) = (\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t))$ gebildet werden, wobei die i-te Spalte von $X(t)$ aus den Komponenten von $\vec{x}_i(t)$ besteht.

Dann ist $X(t) \int_\tau^t X^{-1}(s)\vec{b}(s)ds$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

• Ist ein Fundamentalsystem für die homogene Differentialgleichung bekannt, dann kann analog zum skalaren Fall eine Lösung des inhomogenen Systems mittels Variation der Konstanten gewonnen werden.

Lineare Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

haben die Form $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$, wobei $a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall\ i, j$.

Hier kann man mit dem Ansatz $\vec{x}(t) = \vec{c}e^{\lambda t}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ arbeiten.

Einsetzen in das homogene System liefert mit $\dot{\vec{x}}(t) = \lambda\vec{c}e^{\lambda t}$ die Gleichung $A\vec{c} = \lambda\vec{c}$, d.h. λ ist als Eigenwert von A und $\vec{c}$ als zugehöriger Eigenvektor zu wählen.

Besitzt die Matrix A n verschiedene Eigenwerte, dann erhalten wir n linear unabhängige Eigenvektoren und damit n linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems, i.e. ein Fundamentalsystem.

Ist hingegen λ ein k-facher Eigenwert, dann führt ein Ansatz der Form

$\vec{x}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} t^i \vec{c}_i e^{\lambda t}$ mit geeigneten Vektoren $\vec{c}_i$ zum Ziel.

Beispiel. Betrachte das System

$$\dot{x}_1 = x_1 + 12x_2$$

$$\dot{x}_2 = 3x_1 + x_2$$

Hier ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 7$ und $\lambda_2 = -5$.

Ein Eigenvektor zu $\lambda_1 = 7$ ist $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, und zu $\lambda_2 = -5$ erhalten wir $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ein Fundamentalsystem wird also durch die Lösungen

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} \, , \; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t} \quad \text{gebildet.}$$