Fourier-Reihen

Sehr häufig in der Natur begegnen uns periodische Vorgänge, z.B. beim Lauf der Gestirne am Nachthimmel. In der Physik sind Phänomene wie Schwingungen und Wechselströme periodischer Natur. Zumeist wird versucht, einen allgemeinen periodischen Vorgang durch einfachere zusammenzusetzen. Die einfachsten periodischen Vorgänge sind solche, welche durch die trigonometrischen Funktionen $\cos nx$ und $\sin nx$, $n \in \mathbb{N}$ beschrieben werden.

Definition. Eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f heißt **periodisch** mit der Periode $T \neq 0$, wenn $f(x+T) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Bemerkungen.
(i) Ist f periodisch mit der Periode T , so ist auch kT , $k \in \mathbb{N}$ eine Periode.

(ii) $\cos nx$ und $\sin nx$, $n \in \mathbb{N}$ sind periodisch mit der Periode $T = 2\pi$.

Definition. Das (2π-periodische) Funktionensystem

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = 1 \\
&\varphi_1(x) = \cos x \quad , \quad \varphi_2(x) = \sin x \\
&\varphi_3(x) = \cos 2x \quad , \quad \varphi_4(x) = \sin 2x \\
&\varphi_5(x) = \cos 3x \quad , \quad \varphi_6(x) = \sin 3x \\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

heißt **trigonometrisches System** .

Bemerkung. Für das trigonometrische System gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = \pi\delta_{nm} \quad \text{wenn} \quad n \neq 0 \quad ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(x)\varphi_0(x)dx = 2\pi \quad .$$

Physikalische Problemstellungen führen oft auf die Untersuchung von Rand- und Anfangswertproblemen bei partiellen Differentialgleichungen. Da diese Differentialgleichungen meist linear sind, ist das Superpositionsprinzip anwendbar, sodass also die Lösung eines solchen Problems durch eine Linearkombination spezieller Lösungen (die bereits die Randbedingungen erfüllen) erzielt werden kann. Dies bedeutet dann aber, dass eine gegebene Funktion $f(x)$ (Anfangsbedingung) in eine Reihe nach einem vorgegebenen Funktionensystem zu entwickeln ist, i.e. $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$.

Ein Beispiel für eine derartige Entwicklung war ja bereits im Rahmen der Taylor-Reihen gegeben, wobei dort das Funktionensystem das System der Potenzen $1\ ,\ x - x_0\ ,\ (x-x_0)^2\ ,\ldots$ war.

Im Fall von periodischen Funktionen liegt es nahe, eine solche Funktion in eine Reihe nach dem trigonometrischen System zu entwickeln

$$f(x) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Wir betrachten zuerst den Fall von gleichmäßig konvergenten Reihen.

Satz.
Sei $X = [-\pi, \pi]$ und gelte $f(x) \underset{X}{=} \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$.

Dann sind die Koeffizienten durch

$$a_k = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \qquad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \qquad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{gegeben.}$$

Beweis. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe ist $f(x)$ stetig, die Funktionen $f(x)\cos kx$ und $f(x)\sin kx$ sind R-integrierbar auf $[-\pi, \pi]$ und gliedweise Integration ist erlaubt.

Damit erhalten wir

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\tfrac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (a_l \cos lx + b_l \sin lx) \right) \cos kx dx =$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{l=1}^{\infty} \left(a_l \int_{-\pi}^{\pi} \cos lx \cos kx dx + b_l \int_{-\pi}^{\pi} \sin lx \cos kx dx \right) = \pi a_k$$

weil $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 2\pi\delta_{k0}$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos lx \cos kx dx = \pi\delta_{lk}$ und

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin lx \cos kx dx = 0$.

Analog zeigt man, dass $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \pi b_k$. $\square$

Damit können wir nun einer R-integrierbaren periodischen Funktion eine trigonometrische Reihe zuordnen.

Definition. Die 2π-periodische Funktion $f(x)$ sei R-integrierbar auf $[-\pi, \pi]$. Dann heißen die Zahlen $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ und $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ die **Fourier-Koeffizienten** von f und die mit diesen Koeffizienten gebildete trigonometrische Reihe die f zugeordnete **Fourier-Reihe**.

Bemerkung. Im Falle der gleichmäßigen Konvergenz der Fourier-Reihe wird die Funktion $f(x)$ auch tatsächlich durch die Fourier-Reihe dargestellt. Im allgemeinen Fall einer R-integrierbaren Funktion ist dies nicht von vornherein gewährleistet.

In den meisten Fällen kommt man mit dem folgenden hinreichenden Kriterium aus.

Satz. Sei $f(x)$ eine 2π-periodische R-integrierbare Funktion. Falls an einer Stelle x_0 der rechtsseitige und linksseitige Grenzwert $f(x_0^+)$ bzw. $f(x_0^-)$ sowie die verallgemeinerten rechts- und linksseitigen Ableitungen

$f'_+(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0^+)}{h}$ bzw. $f'_-(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0^-)}{h}$

existieren, konvergiert die Fourier-Reihe gegen das arithmetische Mittel

$\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$.

(Im Falle der Stetigkeit an x_0 und Existenz der einseitigen Ableitungen an x_0 folgt also damit, dass die Fourier-Reihe gegen $f(x_0)$ konvergiert.)

Bemerkung. Ist $f(x)$ eine periodische Funktion mit der Periode T , so kann man f eine Fourier-Reihe der Form

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi k x}{T} + b_k \sin \frac{2\pi k x}{T} \right)$ zuordnen, wobei

$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos \frac{2\pi k x}{T} dx \quad (k = 0, 1, \ldots)$ und

$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin \frac{2\pi k x}{T} dx \quad (k = 1, 2, \ldots)$.

Dies wird durch die Transformation $x = \frac{T}{2\pi} t$ bzw. $t = \frac{2\pi}{T} x$ erzielt, wobei nun die Funktion $\widetilde{f}(t)$ mit $\widetilde{f}(t) = f(\frac{T}{2\pi} t)$ die Periode 2π besitzt. Die Bestimmung der Fourier-Koeffizienten von $\widetilde{f}(t)$ und Rücksubstitution liefert die Behauptung.

Satz. Sei $f(x)$ eine 2π-periodische Funktion.

1) Ist $f(x)$ eine **gerade** Funktion, i.e. $f(-x) = f(x) \;\; \forall\, x$, dann hat die zugeordnete Fourier-Reihe die Form $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$.

2) Ist $f(x)$ eine **ungerade** Funktion, i.e. $f(-x) = -f(x) \;\; \forall\, x$, dann hat die zugeordnete Fourier-Reihe die Form $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$.

Beweis. Im Falle einer geraden Funktion $f(x)$ ist der Integrand bei b_k , $f(x) \sin kx$ eine ungerade Funktion. Damit ist aber das Integral über das symmetrische Intervall $[-\pi, \pi]$ Null. Im Falle einer ungeraden Funktion $f(x)$ ist der Integrand bei a_k , $f(x) \cos kx$ ebenfalls eine ungerade Funktion. Damit ist aber das Integral über das symmetrische Intervall $[-\pi, \pi]$ Null. $\square$

Bei manchen Anwendungen wie etwa der schwingenden Saite ist auf einem Intervall $[0, L]$ eine Funktion $f(x)$ gegeben (Anfangsbedingung). Vorteilhaft wäre es, $f(x)$ in eine Reihe mit **nur** Sinus-Gliedern zu entwickeln. Um dieses Ziel zu erreichen, setzt man $f(x)$ so auf das Intervall $[-L, L]$ fort, dass $f(x)$ auf $[-L, L]$ ungerade ist, und anschließend zu einer periodischen Funktion mit Periode $2L$ auf ganz $\mathbb{R}$ fort.

Analog kann man vorgehen, wenn eine auf einem Intervall $[0, L]$ gegebene Funktion in eine reine Cosinus-Reihe entwickelt werden soll.

Beispiele.

1) Die **Vorzeichenfunktion**

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{wenn } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{wenn } x = -\pi, 0, \pi \\ 1 & \text{wenn } 0 < x < \pi \end{cases} \qquad f(x \pm 2\pi) = f(x)$$

ist eine ungerade Funktion. Ihre Fourier-Reihe enthält damit nur Sinus-Glieder.

$$b_k = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign}(x) \sin kx dx = \tfrac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \sin kx dx = -\tfrac{2}{k\pi} \cos kx \Big|_0^\pi = \tfrac{2}{k\pi}(1 - (-1)^k)$$

Daraus folgt, dass $b_{2n} = 0$ und $b_{2n+1} = \frac{4}{(2n+1)\pi}$ ist.

Die zugeordnete Fourier-Reihe ist damit $\operatorname{sign}(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

Gemäss dem früheren Satz stellt die Fourier-Reihe die Funktion $\operatorname{sign}(x)$ überall dar, i.e. $\operatorname{sign}(x) = \frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

Setzt man etwa $x = \frac{\pi}{2}$, so folgt $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

2) Die **Betragsfunktion** $f(x) = |x|$ für $-\pi \leq x \leq \pi$ und $f(x \pm 2\pi) = f(x)$ ist eine gerade Funktion und ihre Fourier-Reihe enthält daher nur Cosinus-Glieder.

$$a_0 = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \tfrac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |x| \cos kx dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x \cos kx dx = \ldots = -\frac{2}{k^2\pi}(1-(-1)^k)$$

Daraus folgt, dass $a_{2n} = 0$ und $a_{2n+1} = -\frac{4}{(2n+1)^2\pi}$ ist.

Die zugeordnete Fourier-Reihe ist damit $|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

Wiederum stellt die Fourier-Reihe die Funktion $|x|$ überall dar, also $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

Setzt man etwa $x = 0$ ergibt sich $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

3) Die **Sägezahnfunktion** $f(x) = x$ für $-\pi < x < \pi$ und $f(x \pm 2\pi) = f(x)$ ist eine ungerade Funktion und ihre Fourier-Reihe enthält daher nur Sinus-Glieder.

Man zeigt leicht, dass $b_k = \frac{1}{k}(-1)^{k+1}$ und die Fourier-Reihe

$2\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$ ist.

4) Die Funktion $f(x) = x^2$ für $-\pi \leq x \leq \pi$ und $f(x \pm 2\pi) = f(x)$ ist eine gerade Funktion und ihre Fourier-Reihe enthält daher nur Cosinus-Glieder.

Dabei ist $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$ und $a_k = \frac{4}{k^2}(-1)^k$.

Die zugeordnete Fourier-Reihe ist somit $x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx$.

Da wiederum (siehe früher) die Fourier-Reihe die Funktion überall darstellt, gilt $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx$.

Setzt man $x = \pi$, erhält man $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Setzt man $x = 0$, erhält man $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.