Eigenschaften von Mehrfachintegralen

Im folgenden seien f bzw. g stets stückweise stetig, und der Bereich B stückweise glatt.

Mittels Riemannscher Summen kann man die Linearität, Additivität und Positivität nachweisen.

- (**Linearität**) $\int\underset{B}{\cdots}\int [\lambda f(x_1,\cdots,x_n) + \mu g(x_1,\cdots,x_n)] dx_1\cdots dx_n =$

$= \lambda \int\underset{B}{\cdots}\int f(x_1,\cdots,x_n) dx_1\cdots dx_n + \mu \int\underset{B}{\cdots}\int g(x_1,\cdots,x_n) dx_1\cdots dx_n$

- (**Additivität**) Sei $B_1,\cdots,B_m$ eine Zerlegung von B , wobei $B_1 \cup \cdots \cup B_m = B$ und $B_i \cap B_j$ nur Randkomponenten von B_i bzw. B_j enthält.

$\int\underset{B}{\cdots}\int f(x_1,\cdots,x_n) dx_1\cdots dx_n =$

$\int\underset{B_1}{\cdots}\int f(x_1,\cdots,x_n) dx_1\cdots dx_n + \cdots + \int\underset{B_m}{\cdots}\int f(x_1,\cdots,x_n) dx_1\cdots dx_n$

- (**Positivität**) Sei $f(x_1,\cdots,x_n) \geq 0$ auf B .

Dann gilt $\int\underset{B}{\cdots}\int f(x_1,\cdots,x_n) dx_1\cdots dx_n \geq 0$.

Folgerung. Ist $f \geq g$ auf B , dann ist

$\int\underset{B}{\cdots}\int f(x_1,\cdots,x_n) dx_1\cdots dx_n \geq \int\underset{B}{\cdots}\int g(x_1,\cdots,x_n) dx_1\cdots dx_n$.

(Beweis: Verwende $h = f - g$)

Weiters gilt die **Betragsungleichung**

$$\left| \int\underset{B}{\cdots}\int f(x_1,\cdots,x_n) dx_1\cdots dx_n \right| \leq \int\underset{B}{\cdots}\int |f(x_1,\cdots,x_n)| dx_1\cdots dx_n$$

Beweis. Ist $\underset{B}{\int \cdots \int} f dx_1 \cdots dx_n \geq 0$, dann gilt wegen $f \leq |f|$

$$\left| \underset{B}{\int \cdots \int} f dx_1 \cdots dx_n \right| = \underset{B}{\int \cdots \int} f dx_1 \cdots dx_n \leq \underset{B}{\int \cdots \int} |f| dx_1 \cdots dx_n \ .$$

Ist $\underset{B}{\int \cdots \int} f dx_1 \cdots dx_n \leq 0$, dann gilt wegen $-f \leq |f|$

$$\left| \underset{B}{\int \cdots \int} f dx_1 \cdots dx_n \right| = - \underset{B}{\int \cdots \int} f dx_1 \cdots dx_n =$$

$$= \underset{B}{\int \cdots \int} (-f) dx_1 \cdots dx_n \leq \underset{B}{\int \cdots \int} |f| dx_1 \cdots dx_n \ . \quad \square$$

Satz. (**Mittelwertsatz**)

Sei f stetig auf einem zusammenhängenden kompakten Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann existiert ein Punkt $P(\xi, \eta, \zeta)$, sodass

$f(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{Vol(B)} \iiint_B f(x, y, z) \ dV$, wobei

$Vol(B) = \iiint_B 1 \cdot dV$ das Volumen von B bezeichnet.

Beweis. Weil f stetig auf der kompakten Menge B ist, werden das Maximum und das Minimum angenommen, d.h. $\exists \ P_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ sodass $f(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = m$, $\exists \ P_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ sodass $f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = M$ und $m \leq f(x, y, z) \leq M$ auf B .

Damit gilt

$$mVol(B) = m \iiint_B 1 \cdot dV \leq \iiint_B f(x, y, z) dV \leq M \iiint_B 1 \cdot dV = MVol(B)$$

Folglich $m \leq \mu(f) = \frac{1}{Vol(B)} \iiint_B f(x, y, z) dV \leq M$ ($\mu(f)$ heißt auch der Mittelwert von f) .

Weil B zusammenhängend ist, gibt es einen Polygonzug, also eine stetige Kurve $C : (x(t), y(t) z(t))$ mit Anfangspunkt P_0 und Endpunkt P_1 , welche ganz in B verläuft.

Betrachte nun die stetige Funktion $\varphi(t) = f(x(t), y(t), z(t))$. Nach dem

Zwischenwertsatz wird jeder Wert zwischen Minimum und Maximum von φ angenommen, d.h. $\exists\, t^* \ :\ \varphi(t^*) = \mu(f)$.

Der gesuchte Punkt ist dann $P(\xi, \eta, \zeta) = P(x(t^*), y(t^*), z(t^*)$. $\square$

Bemerkungen.

(i) Im 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung wurde gezeigt, dass

$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$, $a \leq \xi \leq b$ bzw.

$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx$ und $Vol(I) = b - a$.

(ii) Der Mittelwertsatz gilt auch in analoger Weise für den $\mathbb{R}^n$.