Implizite Differenzialgleichungen

Diese haben die Form $F(x, y, y') = 0$, wobei F stetig in einem Bereich des $\mathbb{R}^3$ ist.

Bemerkung. Man setzt hier oft $y' = p$. Die Linienelemente sind bei impliziten Differenzialgleichungen also implizit gegeben ($(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p})$ mit $F(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p}) = 0$) .

Definition.

1) Ist $F(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p}) = 0$ und kann die Gleichung $F(x, y, p) = 0$ in einer Umgebung von $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p})$ nach p aufgelöst werden (also $p = f(x, y)$) , dann heißt $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p})$ ein **reguläres Linienelement**, sonst ein **singuläres Linienelement**.

2) Der Punkt $(\overline{x}, \overline{y})$ heißt **singulärer Punkt** der Dgl $F(x, y, y') = 0$, wenn er Träger eines singulären Linienelementes ist (ansonsten **regulärer Punkt**).

3) Die Menge aller singulären Punkte heißt **Diskriminantenmannigfaltigkeit** (im Falle einer Kurve **Diskriminantenkurve**).

4) Eine Lösung $y = y(x)$ von $F(x, y, y') = 0$ heißt **regulär** bzw. **singulär**, wenn alle Linienelemente $(x, y(x), y'(x))$ regulär bzw. singulär sind.

Mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen erhalten wir somit eine **hinreichende** Bedingung für ein reguläres Linienelement :

Sei $F(x, y, p)$ stetig differenzierbar in einer Umgebung von $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p})$ mit $F(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p}) = 0$. Gilt $F_p(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p}) \neq 0$, dann ist $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p})$ ein reguläres Linienelement.

Daraus folgt wiederum eine notwendige Bedingung für ein singuläres Linienelement (falls $F(x, y, p)$ stetig differenzierbar) :

$$F(\overline{x},\overline{y},\overline{p}) = 0 \quad \text{und} \quad F_p(\overline{x},\overline{y},\overline{p}) = 0 \; .$$

Beispiel. $F(x,y,y') = y'^2 - 4x^2 = 0$

Mit $y' = p$ ist $F(x,y,p) = p^2 - 4x^2 = 0$, also $p^2 = 4x^2$ und damit $p = 2x$ oder $p = -2x$.

$F(x,y,p)$ ist stetig differenzierbar, $F_p = 2p$. Also ist $F_p \neq 0$ für $p \neq 0$, also für $x \neq 0$.

Das heißt : für $\overline{x} \neq 0$ sind $(\overline{x},\overline{y},2\overline{x})$ und $(\overline{x},\overline{y},-2\overline{x})$ reguläre Linienelemente.

Für Punkte $(0,\overline{y},0)$ kann $F(x,y,p) = p^2 - 4x^2 = 0$ in **keiner** Umgebung von $(0,\overline{y},0)$ nach p aufgelöst werden.

Damit sind die singulären Linienelemente durch $(0,\overline{y},0)$ gegeben und die Diskriminantenkurve durch $x = 0$.

Bemerkung. Die Lösungen der Differenzialgleichung ($y' = \pm 2x$) sind durch $y = \pm x^2 + C$ gegeben.

Beispiel. $F(x,y,y') = xy' - y = 0$

$F(x,y,p) = xp - y = 0 \quad , \quad F_p = x$

Die Linienelemente $(\overline{x},\overline{y},\overline{p})$ mit $\overline{x} \neq 0$ sind also regulär.

$F_p = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0$. D.h. $(0,0)$ ist singulärer Punkt.

Die allgemeine Lösung der Dgl ist $y = Cx \;,\; C \in \mathbb{R}$.

Bemerkung. Die Diskriminantenmannigfaltigkeit kann in der Regel aus den beiden Gleichungen $F(x,y,p) = 0$ und $F_p(x,y,p) = 0$ durch Elimination von p gewonnnen werden.

Für gewisse Klassen von Differenzialgleichungen ist es möglich, eine Parameterdarstellung für die Lösungen zu gewinnen wobei $p = y'$ als Parameter fungiert.

Ist eine derartige Darstellung $x(p), y(p)$ möglich, dann muß

$\dot{x}(p) = \frac{dx}{dp} \neq 0$ und $\dot{y}(p) = p\dot{x}(p)$ sein, weil

$p = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = y'(x)$.

Man kann zeigen, dass dies genau dann möglich ist, wenn eine explizite Darstellung $y = \varphi(x)$ der Lösung möglich ist mit $\varphi''(x) \neq 0$.

1) $x = g(y')$, g stetig differenzierbar

Setze $p = y'$. Dann ist $x = g(p)$.

Wegen $\dot{y}(p) = p\dot{x}(p) = p\dot{g}(p)$ erhalten wir eine Parameterdarstellung für die Lösung, nämlich

$x = g(p)$, $y = \int p\dot{g}dp$

2) $y = g(y')$, g stetig differenzierbar

Setze $p = y'$. Dann ist $y = g(p)$.

$\dot{y} = p\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{g}(p) = p\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{1}{p}\dot{g}(p)$ für $p \neq 0$.

Damit erhalten wir

$x(p) = \int \frac{1}{p}\dot{g}(p)dp + C$, $y(p) = g(p)$

Des weiteren ist $y = g(0) \ldots$ const. eine Lösung, wenn 0 im Definitionsbereich von g liegt.

3) $y = xy' + g(y')$ ... **Clairot Differenzialgleichung**

Wir beobachten zuerst, dass für $y' = C$ die Gerade $y = Cx + g(C)$ eine Lösung der Dgl ist. Damit erhalten wir als Lösungen die Geradenschar

$y = Cx + g(C)$, $C \in \mathbb{R}$.

Setzen wir nun $y' = p$. Dann ist $\dot{y} = p\dot{x}$.

Aus $y = xp + g(p)$ folgt $\dot{y} = \dot{x}p + x + \dot{g}(p)$, also $x + \dot{g}(p) = 0$.

Daraus erhalten wir eine Parameterdarstellung einer Lösung,

$$x(p) = -\dot{g}(p) \quad , \quad y(p) = -p\dot{g}(p) + g(p) \; .$$

Man kann zeigen, dass dadurch die Einhüllende der obigen Geradenschar vorliegt.

Beispiel. $y = xy' + e^{y'}$

ist Clairot Dgl. mit $g(p) = e^p$.

Zum einen erhalten wir die Geradenschar $y = Cx + e^C$, $C \in \mathbb{R}$ als Lösungen.

Für die Einhüllende gilt

$$x(p) = -\dot{g}(p) = -e^p \; (< 0) \quad , \quad y(p) = -p\dot{g}(p) + g(p) = -pe^p + e^p$$

Mit $e^p = -x$ und $p = \ln(-x)$ erhalten wir

$$y(x) = x\ln(-x) - x \; .$$