Systeme von Differenzialgleichungen 1. Ordnung

Ein System von Differenzialgleichungen 1. Ordnung besitzt die Form

$$y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$\ldots\ldots$$
$$y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Ein n-Tupel $(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ von Funktionen heißt **Lösung** des Systems, wenn alle Funktionen $y_i(t)$ auf einem gewissen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert und dort differenzierbar sind sowie das System identisch erfüllen.

Wir betrachten nun vektorwertige Funktionen einer Veränderlichen, das sind Abbildungen

$$\vec{y} : I \to \mathbb{R}^n \quad , \quad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \cdots \\ \cdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

Differenziation und Integration von derartigen Funktionen sind komponentenweise definiert, d.h.

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} y_1{}'(t) \\ \cdots \\ \cdots \\ y_n{}'(t) \end{pmatrix} \quad , \quad \int_a^b \vec{h}(t)dt = \begin{pmatrix} \int_a^b h_1(t)dt \\ \cdots \\ \cdots \\ \int_a^b h_n(t)dt \end{pmatrix}$$

Mit der Bezeichnungsweise $\vec{f}(t,\vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(t,y_1,\ldots,y_n) \\ \cdots \\ \cdots \\ f_n(t,y_1,\ldots,y_n) \end{pmatrix}$

kann das zuvor gegebene System in der Vektorschreibweise als

$\vec{y}\,' = \vec{f}(t,\vec{y})$ geschrieben werden.

Bemerkung. Ein Anfangswertproblem $\vec{y}\,' = \vec{f}(t,\vec{y})$, $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$ ist äquivalent zum System von Integralgleichungen

$$\vec{y}(t) = \vec{\eta} + \int_{\xi}^{t} \vec{f}(\tau,\vec{y}(\tau))d\tau$$

Bemerkung. Sind die Funktionen $f_1,\ldots,f_n$ in einer Umgebung von $(\xi,\vec{\eta})$ stetig differenzierbar, dann ist das Anfangswertproblem

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(t,\vec{y}) \quad , \quad \vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$$

lokal eindeutig lösbar.

Sind die Funktionen $f_1,\ldots,f_n$ in einer Umgebung von $(\xi,\vec{\eta})$ stetig, dann hat das Anfangswertproblem

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(t,\vec{y}) \quad , \quad \vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$$

mindestens eine Lösung.

(Der Beweis erfolgt mittels funktionalanalytischer Methoden analog wie im eindimensionalen Fall).

Beispiel. Eine Differenzialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(t,y(t),y'(t),\ldots,y^{(n-1)}(t))$$

kann auf folgende Art auf ein System von Differenzialgleichungen 1. Ordnung zurückgeführt werden.

Setze $y_1(t) = y(t)$

$y_2(t) = y_1{}'(t) = y'(t)$

$y_3(t) = {y_2}'(t) = y''(t)$

$\ldots$

$y_n(t) = {y_{n-1}}'(t) = y^{(n-1)}(t)$

Dann ist ${y_n}' = y^{(n)}(t) = f(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, also

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ .. \\ .. \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{f}(t, \vec{y}) = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ \ldots \\ y_n(t) \\ f(t, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix}$$

Hat man für dieses System eine Anfangsbedingung

$$y_1(\xi) = \eta_0 \ , \ y_2(\xi) = \eta_1 \ , \ \ldots \ , \ y_n(\xi) = \eta_{n-1}$$

dann bedeutet dies für die ursprüngliche Differenzialgleichung

$$y(\xi) = \eta_0 \ , \ y'(\xi) = \eta_1 \ , \ \ldots \ , \ y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$$

Für die nachfolgende Diskussion von linearen Systemen seien einige Aussagen über Matrizen erwähnt.

$M(n \times n, \mathbb{R})$ sei der Vektorraum der reellen $n \times n$ Matrizen. Für diesen Vektorraum existieren mehrere Normen, wie etwa

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} \quad , \quad \|A\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \quad , \quad \|A\| = \max\{|a_{ij}|\}$$

Matrizenfunktionen einer Veränderlichen sind Abbildungen von einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ nach $M(n \times n, \mathbb{R})$.

Man schreibt hier auch $A(t) = (a_{ij}(t))$, d.h. die Komponenten von A sind jeweils Funktionen von t .

$A(t)$ heißt

- **stetig**, wenn alle $a_{ij}(t)$ stetig sind
- **differenzierbar**, wenn alle $a_{ij}(t)$ differenzierbar sind. In diesem Fall ist per definition

$A'(t) = (a_{ij}'(t))$

• **integrierbar**, wenn alle $a_{ij}(t)$ integrierbar sind. In diesem Fall ist per definition

$$\int_a^b A(t)dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t)dt\right)$$

Dabei gelten folgende Rechenregeln

1. $(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$ (Produktregel)

2. $(A(t)\vec{x}(t))' = A'(t)\vec{x}(t) + A\vec{x}'(t)$

3. $(\det A(t))' = \sum_{i=1}^{n} \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, \ldots, a_n)$

wobei $a_1, \ldots, a_n$ die Spalten der Matrix A bezeichnen.