Lineare Differenzialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten nun

$$Lu = u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \ldots + a_1 u' + a_0 u = b(t)$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Um ein FS für die homogene Gleichung

$$Lu = u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \ldots + a_1 u' + a_0 u = 0$$

zu finden, treffen wir (gemäß früheren Überlegungen) den Ansatz

$$u(t) = e^{\lambda t}$$

und erhalten für die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0 \ .$$

Durch Einsetzen stellt sich dabei sofort heraus:

- Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine k-fache Nullstelle, dann sind

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{k-1}e^{\lambda t}$$

k linear unabhängige Lösungen von $Lu = 0$.

- Ist $\lambda = \mu + i\nu \in \mathbb{C}$ eine k-fache Nullstelle, dann auch $\overline{\lambda}$.

Das Paar $(\lambda, \overline{\lambda})$ liefert k linear unabhängige komplexe Lösungen

$$e^{(\mu+i\nu)t}, te^{(\mu+i\nu)t}, \ldots, t^{k-1}e^{(\mu+i\nu)t}$$

bzw. $2k$ linear unabhängige reelle Lösungen

$$\begin{array}{lcl} e^{\mu t}\cos\nu t & , & e^{\mu t}\sin\nu t \\ te^{\mu t}\cos\nu t & , & te^{\mu t}\sin\nu t \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

$$t^{k-1}e^{\mu t}\cos\nu t \quad , \quad t^{k-1}e^{\mu t}\sin\nu t$$

Beispiel. $u^{(5)} + 4u^{(4)} + 2u''' - 4u'' + 8u' + 16u = 0$

Wir erhalten $\lambda^5 + 4\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$

mit den Lösungen $\lambda_{1,2,3} = -2$, $\lambda_4 = 1 + i$, $\lambda_5 = 1 - i$.

Folglich bilden e^{-2t} , te^{-2t} , t^2e^{-2t} , $e^t\cos t$, $e^t\sin t$ ein FS.

Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist

$$u(t) = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t} + C_3t^2e^{-2t} + C_4e^t\cos t + C_5e^t\sin t$$

mit $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}$.

Beispiel. $u^{(4)} + 2u'' + u = 0$

Wir erhalten $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = 0$

mit den Lösungen $\lambda_{1,2} = +i$, $\lambda_{3,4} = -i$.

Folglich bilden $\cos t$, $t\cos t$, $\sin t$, $t\sin t$ ein FS.

Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist

$$u(t) = C_1\cos t + C_2t\cos t + C_3\sin t + C_4t\sin t$$

mit $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

Für die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \ldots + a_1u' + a_0u = b(t)$$

benötigen wir wieder die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung und **eine** spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

Diese wiederum kann durch **Variation der Konstanten** oder mittels **Ansatz** gefunden werden.

Wir diskutieren jetzt das Finden einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung mittels eines geeigneten Ansatzes.

Wir beobachten zuerst (**Superpositionsprinzip**):

Sei $b(t) = g_1(t)+\ldots+g_k(t)$ und $u_i(t)$ eine spezielle Lösung von $Lu = g_i(t)$, dann ist

$$u(t) = u_1(t) + \ldots + u_k(t)$$

eine spezielle Lösung von $Lu = b(t)$.

Beweis.

$Lu = L(u_1 + \ldots + u_k) = Lu_1 + \ldots + Lu_k = g_1 + \ldots g_k = b$. $\square$

Das heißt: wir können für die Summanden von $b(t)$ jeweils eigene Ansätze treffen und diese dann zusammensetzen.

Damit ein Ansatz in der nachfolgenden Weise "funktioniert", darf **keine** sogenannte "äußere Resonanz" vorliegen.

Definition.

(i) Ist $g(t)$ ein Summand von $b(t)$ und zugleich Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung, dann liegt für $g(t)$ **äußere Resonanz** vor.

(ii) Man spricht von **innerer Resonanz**, wenn eine Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms mehrfach auftritt.

Beispiele für Ansätze:

g(t)	entsprechender Ansatz
A (const.)	B (const.)
$A_0 + A_1t + ... + A_mt^m$	$B_0 + B_1t + ... + B_mt^m$
t^m	$B_0 + B_1t + ... + B_mt^m$
$Ae^{\mu t}$	$Be^{\mu t}$
$A\text{sin}(kt)$	$C\text{sin}(kt)+D\text{cos}(kt)$
$A\text{cos}(kt)$	$C\text{sin}(kt)+D\text{cos}(kt)$
$A\text{sin}(kt)+B\text{cos}(kt)$	$C\text{sin}(kt)+D\text{cos}(kt)$
$Ae^{\mu t}\text{sin}(kt)$	$e^{\mu t}(C\text{cos}(kt) + D\text{sin}(kt))$
$Ae^{\mu t}\text{cos}(kt)$	$e^{\mu t}(C\text{cos}(kt) + D\text{sin}(kt))$
$e^{\mu t}(A\text{cos}(kt) + B\text{sin}(kt))$	$e^{\mu t}(C\text{cos}(kt) + D\text{sin}(kt))$
$e^{\mu t}P(t)$	$e^{\mu t}Q(t)$
$P(t)\text{sin}(kt)$	$Q(t)\text{sin}(kt) + R(t)\text{cos}(kt)$
$P(t)\text{cos}(kt)$	$Q(t)\text{sin}(kt) + R(t)\text{cos}(kt)$

- Bei äußerer Resonanz und keiner innerer Resonanz :

Multipliziere den Ansatz für $g(t)$ mit t .

- Bei äußerer Resonanz und innerer Resonanz :

Multipliziere den Ansatz für $g(t)$ mit t^k , falls λ eine k-fache Nullstelle ist.

Beispiel. $u'' + 4u = \sin t + t^2$

Für die homogene Gleichung erhalten wir $\lambda^2 + 4 = 0$, also

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i \quad \text{und} \quad u_h = A\cos 2t + B\sin 2t \ .$$

Es liegt keine äußere Resonanz für $\sin t$ und t^2 vor.

Daher Ansatz $u_p = C\sin t + D\cos t + E + Ft + Gt^2 \quad \Rightarrow$

$$u_p' = C\cos t - D\sin t + F + 2Gt$$

$$u_p'' = -C\sin t - D\cos t + 2G$$

Eingesetzt in die Differenzialgleichung ergibt sich

$-C\sin t - D\cos t + 2G + 4C\sin t + 4D\cos t + 4E + 4Ft + 4Gt^2 = \sin t + t^2$

bzw.

$3C\sin t + 3D\cos t + (4E + 2G) + 4Ft + 4Gt^2 = \sin t + t^2$

Koeffizientenvergleich ergibt nun

$3C = 1\ ,\ 3D = 0\ ,\ 4E + 2G = 0\ ,\ 4F = 0\ ,\ 4G = 1$ und damit

$C = \frac{1}{3}\ ,\ D = 0\ ,\ G = \frac{1}{4}\ ,\ F = 0\ ,\ E = -\frac{1}{8}$

Damit ist $u_p = \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}t^2$ und die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung ist

$$u = A\cos 2t + B\sin 2t + \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}t^2 \quad , \ A, B \in \mathbb{R}$$

Beispiel. $u'' + 4u = 2\cos 2t$

$u_h = A\cos 2t + B\sin 2t$.

Hier liegt für $2\cos 2t$ äußere Resonanz vor $(A = 2\ ,\ B = 0)$.

Daher Ansatz $u_p = t(C\sin 2t + D\cos 2t)$.

$u_p' = C\sin 2t + D\cos 2t + t(2C\cos 2t - 2D\sin 2t)$

$u_p'' = 2C\cos 2t - 2D\sin 2t + 2C\cos 2t - 2D\sin 2t +$

$+t(-4C\sin 2t - 4D\cos 2t)$

$u_p'' + 4u_p = 4C\cos 2t - 4D\sin 2t = 2\cos 2t$

Damit ist $4C = 2$, $-4D = 0$ und $C = \frac{1}{2}$, $D = 0$.

Damit ist $u_p = \frac{1}{2} t \sin 2t$ und die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung ist

$$u = A \cos 2t + B \sin 2t + \tfrac{1}{2} t \sin 2t \quad , \ A, B \in \mathbb{R} \ .$$

Beispiel. $u'' - 4u' + 4u = 3te^{2t}$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2$

Es liegt also innere Resonanz vor und $u_h = Ae^{2t} + Bte^{2t}$. Wir sehen, es liegt auch äußere Resonanz vor $(A = 0 \ , \ B = 3)$.

Der "übliche" Ansatz für die rechte Seite wäre $(C + Dt)e^{2t}$.

Da aber innere und äußere Resonanz vorliegt, ist der Ansatz

$$u_p = t^2(C + Dt)e^{2t} = (Ct^2 + Dt^3)e^{2t}$$

Damit

$$u_p' = (2Ct + 3Dt^2)e^{2t} + (Ct^2 + Dt^3)2e^{2t} =$$
$$= (2Ct + 3Dt^2 + 2Ct^2 + 2Dt^3)e^{2t}$$

$$u_p'' = (2C + 6Dt + 4Ct + 6Dt^2)e^{2t} + (2Ct + 3Dt^2 + 2Ct^2 + 2Dt^3)2e^{2t} =$$
$$= (2C + 6Dt + 8Ct + 12Dt^2 + 4Ct^2 + 4Dt^3)e^{2t}$$

$u_p'' - 4u_p' + 4u = \ldots = (2C + 6Dt)e^{2t} = 3te^{2t}$

$$\Rightarrow \quad 2C = 0 \ , \ 6Dt = 3t \quad \Rightarrow \quad C = 0 \ , \ D = \tfrac{1}{2}$$

Also ist $u_p = \frac{1}{2} t^3 e^{2t}$.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung ist

$$u = Ae^{2t} + Bte^{2t} + \tfrac{1}{2} t^3 e^{2t} \quad , \ A, B \in \mathbb{R} \ .$$