

Systeme von Differenzialgleichungen 1. Ordnung

Ein System von Differenzialgleichungen 1. Ordnung besitzt die Form

$$y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

.....

$$y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Beispiel.

$$y_1' = ty_1y_2 + t^2y_3$$

$$y_2' = y_2y_3 - \sin t$$

$$y_3' = y_1y_2y_3^2 + ty_1 - e^t$$

Ein n -Tupel $(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ von Funktionen heißt **Lösung** des Systems, wenn alle Funktionen $y_i(t)$ auf einem gewissen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert und dort differenzierbar sind sowie das System identisch erfüllen.

Wir betrachten nun vektorwertige Funktionen einer Veränderlichen, das sind Abbildungen

$$\vec{y}: I \rightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \cdots \\ \cdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

Differenziation und Integration von derartigen Funktionen sind komponentenweise definiert, d.h.

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \cdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix}, \quad \int_a^b \vec{h}(t) dt = \begin{pmatrix} \int_a^b h_1(t) dt \\ \cdots \\ \int_a^b h_n(t) dt \end{pmatrix}$$

Mit der Bezeichnungsweise $\vec{f}(t, \vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \cdots \\ f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$

kann das zuvor gegebene System in der Vektorschreibweise als

$$\vec{y}' = \vec{f}(t, \vec{y}) \quad \text{geschrieben werden.}$$

Bemerkung. Ein Anfangswertproblem $\vec{y}' = \vec{f}(t, \vec{y})$, $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$ ist äquivalent zum System von Integralgleichungen

$$\vec{y}(t) = \vec{\eta} + \int_{\xi}^t \vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau)) d\tau$$

Bemerkung. Sind die Funktionen f_1, \dots, f_n in einer Umgebung von $(\xi, \vec{\eta})$ stetig differenzierbar, dann ist das Anfangswertproblem

$$\vec{y}' = \vec{f}(t, \vec{y}), \quad \vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$$

lokal eindeutig lösbar.

Sind die Funktionen f_1, \dots, f_n in einer Umgebung von $(\xi, \vec{\eta})$ stetig, dann hat das Anfangswertproblem

$$\vec{y}' = \vec{f}(t, \vec{y}), \quad \vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$$

mindestens eine Lösung.

(Der Beweis erfolgt mittels funktionalanalytischer Methoden analog wie im eindimensionalen Fall).

Beispiel. Eine Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

kann auf folgende Art auf ein System von Differenzialgleichungen 1. Ordnung zurückgeführt werden.

Setze $y_1(t) = y(t)$

$$y_2(t) = y_1'(t) = y'(t)$$

$$y_3(t) = y_2'(t) = y''(t)$$

...

$$y_n(t) = y_{n-1}'(t) = y^{(n-1)}(t)$$

Dann ist $y_n' = y^{(n)}(t) = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$, also

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{f}(t, \vec{y}) = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \\ f(t, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

Hat man für dieses System eine Anfangsbedingung

$$y_1(\xi) = \eta_0, \quad y_2(\xi) = \eta_1, \quad \dots, \quad y_n(\xi) = \eta_{n-1}$$

dann bedeutet dies für die ursprüngliche Differenzialgleichung

$$y(\xi) = \eta_0, \quad y'(\xi) = \eta_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$$

Beispiel. $y''' = t^2 y' y'' + e^t y + t^3$

Setze $y_1(t) = y(t)$, $y_2(t) = y_1'(t) = y'(t)$, $y_3(t) = y_2'(t) = y''(t)$

$$\Rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ t^2 y_2 y_3 + e^t y_1 + t^3 \end{pmatrix}$$

Für die nachfolgende Diskussion von linearen Systemen seien einige Aussagen über Matrizen erwähnt.

$M(n \times n, \mathbb{R})$ sei der Vektorraum der reellen $n \times n$ Matrizen. Für diesen

Vektorraum existieren mehrere Normen, wie etwa

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2} \quad , \quad \|A\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \quad , \quad \|A\| = \max\{|a_{ij}|\}$$

Matrizenfunktionen einer Veränderlichen sind Abbildungen von einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ nach $M(n \times n, \mathbb{R})$.

Man schreibt hier auch $A(t) = (a_{ij}(t))$, d.h. die Komponenten von A sind jeweils Funktionen von t .

$A(t)$ heißt

- **stetig**, wenn alle $a_{ij}(t)$ stetig sind
- **differenzierbar**, wenn alle $a_{ij}(t)$ differenzierbar sind. In diesem Fall ist per definition

$$A'(t) = (a_{ij}'(t))$$

- **integrierbar**, wenn alle $a_{ij}(t)$ integrierbar sind. In diesem Fall ist per definition

$$\int_a^b A(t) dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t) dt \right)$$

Dabei gelten folgende Rechenregeln

1. $(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$ (Produktregel)
2. $(A(t)\vec{x}(t))' = A'(t)\vec{x}(t) + A\vec{x}'(t)$
3. $(\det A(t))' = \sum_{i=1}^n \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, \dots, a_n)$

wobei a_1, \dots, a_n die Spalten der Matrix A bezeichnen.