Übungsblatt 01 - Differenzialgleichungen - SS 2013
(Riegelnegg, Planitzer, Blatnik, Puhr)

1. Man betrachte die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(u,v) = (u^2 + v^2, uv)$. Mit Hilfe des Satzes von der Umkehrfunktion bestimme man jene Punkte (u_0, v_0) , für die es lokal eine Umkehrfunktion von f gibt.

2. Sei $f(x,y) = x^2 - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}y^4$. Offenbar gilt $f(-\frac{1}{2}, 1) = 0$. Man untersuche, ob in einer Umgebung des Punktes $(-\frac{1}{2}, 1)$ eine Auflösung von $f(x,y) = 0$ nach y möglich ist, es also eine Funktion $y = g(x)$ gibt mit $f(x, g(x)) = 0$. Man bestimme auch $g(x)$.

3. Man zeige, dass das System $f_1(x,y,z) = e^{xz} - x^2 + y^2 - 1 = 0$, $f_2(x,y,z) = xy^3 + x^2 z + yz^2 - 1 = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(1,1,0)$ nach $y = g_1(x)$ und $z = g_2(x)$ auflösbar ist.

4. Zeigen Sie, dass die Funktion $y = e^{2x} - \frac{1}{2}e^x \sin x$ eine Lösung der Differenzialgleichung $y'' - 2y' = e^x \sin x$ ist.

5. Zeigen Sie, dass die Funktion $z = z(x,y) = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$ die partielle Differenzialgleichung $\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$ erfüllt. (Hinweis: Setzen Sie $\xi = x^2 - y^2$, dann ist $f = f(\xi)$)