

# Unbestimmte Ausdrücke

Die Bestimmung von Grenzwerten von Funktionen ist vorerst nicht möglich, wenn z.B. der Grenzwert eines Quotienten  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  an einer Stelle  $x_0$  bestimmt werden soll, und es gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  **und**  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  (oder  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  **und**  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ ).

Man nennt diese Ausdrücke "unbestimmte Ausdrücke".

**Beispiel.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ .

Weitere unbestimmte Ausdrücke, außer den genannten  $\left(\frac{0}{0}\right)$  und  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$  wären etwa  $(1^\infty)$ ,  $(0^0)$ ,  $(\infty^0)$ ,  $(0 \cdot \infty)$  und  $(\infty - \infty)$ . Sie lassen sich allerdings auf die beiden Grundfälle zurückführen.

Ohne Beweis sei die folgende wichtige Aussage angeführt.

**Satz. (Regel von de l'Hospital)**

Seien  $f$  und  $g$  (geeignet) differenzierbar auf und gelte

$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$  mit  $\lim_{x \rightarrow b} g'(x) \neq 0$ . Dann folgt aus

$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$  **oder**  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = \infty$

die Aussage

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

**Bemerkungen.**

1) Die Aussage gilt auch, falls  $b = +\infty$  (bzw.  $b = -\infty$ ) ist. Wir setzen  $x = \frac{1}{t}$  und erhalten

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})(-t^{-2})}{g'(\frac{1}{t})(-t^{-2})} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2) Die Aussage gilt auch für den Fall  $l = \pm\infty$ , weil  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow +\infty \Leftrightarrow$

$$\frac{g'(x)}{f'(x)} \rightarrow 0^+ \quad \text{und} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{f'(x)} \rightarrow 0^- .$$

3) Hat man nach einmaliger Anwendung wiederum einen unbestimmten Ausdruck, kann der Satz wiederum auf die Funktionen  $f'$  und  $g'$  angewendet werden, sofern die entsprechenden Voraussetzungen vorliegen.

4)  $f(x)g(x) = (0 \cdot \infty)$  kann übergeführt werden in  $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left(\frac{0}{0}\right)$  oder in  $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ .

5)  $f(x)^{g(x)} = (1^\infty)$  oder  $(0^0)$  oder  $(\infty^0)$  können durch

$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim g(x) \ln f(x)} \quad \text{auf zuvor diskutierte Fälle zurückgeführt werden.}$$

6) Ausdrücke der Form  $f(x) - g(x) = (\infty - \infty)$  müssen zuerst in eine der zuvor erwähnten Formen gebracht werden, um damit weiter arbeiten zu können.

### Beispiele.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x + x \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin x + \sin x + x \cos x} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x + x \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2 \cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{1}{3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)^x = (0^0) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln(e^x - 1)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(e^x - 1)}$

Nun ist  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(e^x - 1) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x - 1)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e^x - 1} e^x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2 e^x}{e^x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{2x e^x + x^2 e^x}{e^x} = 0$

Somit ist  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)^x = e^0 = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x-1}) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x-1}) \frac{x + \sqrt{x-1}}{x + \sqrt{x-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - (x-1)}{x + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + \sqrt{x-1}} = 0 \end{aligned}$$