Der n-dimensionale Raum

Mittels $\mathbb{R}$ kann nur eine Größe beschrieben werden. Um den Ort eines Teilchens im Raum festzulegen, werden schon drei Größen benötigt. Interessiert man sich für den Bewegungszustand eines Teilchens, werden neben den drei Raumkoordinaten auch die jeweiligen Geschwindigkeiten in Richtung dieser Raumkoordinaten benötigt, d.h. wir benötigen ein Objekt, das aus sechs reellen Zahlen aufgebaut ist. Aus diesem Grund betrachten wir nun allgemein die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen.

Definition. Das kartesische Produkt von n Exemplaren von $\mathbb{R}$ wird mit $\mathbb{R}^n = \{x \ : \ x = (x_1, x_2, ..., x_n)\}$ bezeichnet und heißt ***n*-dimensionaler (reeller) Punktraum**.

Die Elemente des $\mathbb{R}^n$ sind sogenannte n-Tupel reeller Zahlen. Im Falle von $n = 1, 2, 3$ gibt es einfache Veranschaulichungen. Für derartige n-Tupel können wir eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen definieren.

Seien $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $x = y \quad \Leftrightarrow \quad x_i = y_i \quad \forall \ i = 1, 2, ..., n$
- $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$
- $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$.

Mit diesen beiden Operationen wird der $\mathbb{R}^n$ zu einem **Vektorraum** (siehe LV Lineare Algebra).

Auf den $\mathbb{R}^n$ können nun weitere, von $\mathbb{R}$ her bereits bekannte Begriffe geeignet übertragen werden.

Definition.

(i) Sei $-\infty < a_i < b_i < \infty \quad \forall \ i = 1, 2, ..., n$
$[a, b] = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \ : \ a_i \leq x_i \leq b_i \ \ \forall \ i\}$ heißt ein **beschränktes abgeschlossenes Intervall** des $\mathbb{R}^n$.

(ii) Sei $-\infty \leq a_i < b_i \leq \infty \quad \forall\ i = 1, 2, ..., n$
$(a, b) = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \ : \ a_i < x_i < b_i \quad \forall\ i\}$ heißt ein **offenes Intervall** des $\mathbb{R}^n$.

Definition. Zu $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt
$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ die **Norm** (bzw. die Länge, der Absolutbetrag) von x .
Die Norm wird oft auch mit $|x|$ bezeichnet.

Man beachte, dass die Norm im Fall $n = 1$ (bzw. $n = 2$) mit dem Betrag reeller Zahlen (bzw. komplexer Zahlen) übereinstimmt.

Definition. Zu $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt
$x \cdot y = \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ das **Skalarprodukt** von x und y .

Offenbar gilt: $\langle x, y\rangle = 0$, wenn $x = 0$ oder $y = 0$,

$$\langle x, x\rangle \geq 0 \ , \ \langle x, x\rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0 \ ,$$

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \ ,$$

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \quad \text{für} \quad \lambda \in \mathbb{R} \ ,$$

$$\langle x, x\rangle = \|x\|^2 \quad \text{bzw.} \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \ .$$

Eine fundamentale Eigenschaft des Skalarproduktes wird durch die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung** ausgedrückt.

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \quad \text{bzw.} \ |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \quad \forall\ x, y$$

Beweisskizze. Der Fall $y = 0$ ist trivial, sei also $y \neq 0$.

Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle$.
Mit $\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ folgt sofort die Behauptung. $\square$

Daraus lassen sich nun sofort die wesentlichen Eigenschaften der Norm (des Absolutbetrages) herleiten.

Satz. Seien $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) $|x_i| \leq \|x\| \quad \forall\ i$

(ii) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 = (0, 0, ..., 0)$

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis. zu (iv): $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$. Durch Wurzelziehen folgt die Behauptung. $\square$

Aus der Norm wiederum kann ein Abstandsbegriff bzw. eine Metrik für den $\mathbb{R}^n$ gewonnen werden.

Definition. Zu $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißt
$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ der **Abstand** von x zu y .

Bemerkungen.

(i) Da nun eine Metrik für den $\mathbb{R}^n$ zur Verfügung steht, sind damit auch ε-Kugeln, Umgebungen, offene Mengen und abgeschlossene Mengen gegeben.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt**, wenn A abgeschlossen und beschränkt (i.e. $\exists\ M > 0$ mit $\|x\| \leq M \ \forall\ x \in A$) ist.

In weiterer Folge können in zuvor erwähnter Weise konvergente Folgen und stetige Abbildungen betrachtet werden.

(ii) Die vorher betrachtete Norm $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ mit korrespondierender Metrik $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ heißt auch **euklidische Norm** bzw. **euklidische Metrik**.

Daneben gibt es noch eine weitere wichtige Norm, nämlich die sogenannte

Maximumsnorm, welche durch $\|x\| = \max\limits_{1\leq k\leq n} |x_k|$ gegeben ist.

Die zugehörige Metrik (**Maximumsmetrik**) ist dann offenbar durch

$d(x,y) = \|x-y\| = \max\limits_{1\leq k\leq n} |x_k - y_k|$ gegeben.

Man kann zeigen, dass beide Metriken dieselben offenen Mengen und konvergenten Folgen liefern, also in diesem Sinne äquivalent sind.

(iii) Sei (x^k) mit $x^k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x$ (i.e. $\|x^k - x\| \to 0$) $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^k = x_i \quad \forall\, i = 1, 2, ..., n$

(D.h. $x^k \to x \quad \Leftrightarrow$ die i-ten Koordinatenfolgen konvergieren gegen x_i)

Beweis.
" $\Rightarrow$ " : folgt aus $|x_i^k - x_i| \leq \|x^k - x\|$.

" $\Leftarrow$ " : Zu $\varepsilon > 0 \;\exists\; K_\varepsilon(i)$ sodaß $\forall\; k > K_\varepsilon(i)$ gilt: $|x_i^k - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.

Dann gilt für $k > \max(K_\varepsilon(1), ..., K_\varepsilon(n)$:

$$\|x^k - x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^k - y_i^k)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\tfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}})^2} = \varepsilon \;. \quad \square$$

Beispiel.

$(\frac{1}{k}, 2 - \frac{1}{k^2}, \sin\frac{1}{k}) \to (0,2,0)$, weil $\frac{1}{k} \to 0$, $2 - \frac{1}{k^2} \to 2$, $\sin\frac{1}{k} \to 0$ für $k \to \infty$.

(iv) **Satz.** $\mathbb{R}^n$ ist vollständig.

Beweis. Sei (x^k) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^n$. Wegen $|x_i^k - x_i^l| \leq \|x^k - x^l\|$ für jedes feste i , ist dann (x_i^k) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, welche gegen einen Wert x_i konvergiert. Diese x_i lassen sich zu einem Punkt $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ zusammensetzen. Wegen der Aussage vorher gilt dann $x^k \to x$. Also ist $\mathbb{R}^n$ vollständig. $\square$

(v) Die Stetigkeit einer Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an einer Stelle x_0 läßt sich gemäß dem Vorherigen so beschreiben :

zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta_\varepsilon > 0$, sodass aus $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_\varepsilon$ folgt dass $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$.

(vi) Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nennt man auch eine **reellwertige Funktion** von n reellen Variablen, bzw. eine **Skalarfunktion**.

Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt auch eine **vektorwertige Funktion** von n reellen Variablen.

Reellwertige Funktionen von 2 reellen Variablen lassen sich ebenfalls durch ihren "Graphen" veranschaulichen, der eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ ist,

$$S_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in D(f) \ , \ z = f(x,y)\} \ .$$

Beispiele.

(i) $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ... obere Halbkugel mit Radius 1

(ii) $D(f) = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ... Kegel um die z-Achse

Wir betrachten nun (geordnete) Punktepaare $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. x ist dabei der **Anfangspunkt** und y der **Endpunkt**.

Zwei Punktepaare (x,y) und (v,w) heißen äquivalent, $(x,y) \sim (v,w)$, wenn $y - x = w - v$. (Man sieht sofort, dass dies tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.)

Im besonderen ist ein Punktepaar (x,y) zu genau einem Punktepaar äquivalent, dessen Anfangspunkt der Ursprung 0 ist, nämlich zu $(0, y-x)$. Das Paar $(0, y-x)$ wiederum kann mit dem "Punkt" $y - x$ des $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden. Ist $x \in \mathbb{R}^n$ gegeben, dann heißt das Paar $(0,x)$ auch **Ortsvektor** des Punktes x .

Eine Äquivalenzklasse der obigen Äquivalenzrelation wird nun als **Vektor** bezeichnet und in der Form $\vec{a}$ geschrieben. Jeder Vektor $\vec{a}$ hat somit einen Repräsentanten, der einem Punkt des $\mathbb{R}^n$ entspricht. Die Schreibweise $\vec{a} = (a_1, a_2, ...a_n)$ bezeichnet somit alle Punktepaare (x,y) mit $y - x = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Wegen der Möglichkeit, Vektoren mit Punkten des $\mathbb{R}^n$ zu identifizieren, können Vektoren auch addiert und mit reellen Zahlen multipliziert werden, wodurch ein Vektorraum $\mathbb{V}^n$ entsteht (der allerdings, wie oben erwähnt, dem $\mathbb{R}^n$ entspricht).

Die Verwendung des $\mathbb{V}^n$ erlaubt es, gewisse Sachverhalte anschaulicher darzustellen, z.B. den Begriff der Translation.

Definition. Sei $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{V}^n$. Die Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $T(x) = x + \vec{a}$, $(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto (x_1 + a_1, x_2 + a_2, ..., x_n + a_n)$ heißt **Translation** (mit Verschiebungsvektor $\vec{a}$).

Weitere wichtige Begriffe seien hier nur kurz aufgeführt.

1) Zu $x \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{0} \neq \vec{a} \in \mathbb{V}^n$ heißt die Menge

$\{z \in \mathbb{R}^n \ : \ z = x + \lambda\vec{a} \ , \ \lambda \in \mathbb{R}\}$ die durch $\vec{a}$ **definierte Gerade durch den Punkt** x . ($\vec{a}$ ist dabei der sogenannte **Richtungsvektor** der Geraden)

2) Ist $x \in \mathbb{R}^n$ und sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ linear unabhängig (siehe Lineare Algebra), dann heißt die Menge

$\{z \in \mathbb{R}^n \ : \ z = x + \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_k\vec{a}_k \ , \ \lambda_i \in \mathbb{R}\}$

der von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ aufgespannte k-dimensionale **affine Unterraum** durch den Punkt x (bzw. k-dimensionale Ebene durch x). Im Falle von $k = n - 1$ spricht man auch von einer **Hyperebene**.

3) Zu $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißt

$\overline{xy} = \{z \in \mathbb{R}^n \ : \ z = x + \lambda(y - x) \ , \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$

die **Verbindungsstrecke** von x und y .

4) Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn sie mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält, d.h.

$\forall \ x, y \in X \ \ \forall \lambda \in [0, 1] \ : \ (1 - \lambda)x + \lambda y \in X$

Wir betrachten nun vektorwertige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Zum Beispiel kann eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ so interpretiert werden, dass einem Ortspunkt $x \in D(f) \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Geschwindigkeitsvektor zugeordnet wird.

Sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine vektorwertige Funktion, i.e.

$$x = (x_1, ..., x_n) \ \mapsto \ f(x) = f(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$$

Die Funktionen $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $D(f_i) = D(f)$ für $1 \leq 1 \leq m$ heißen dabei **Koordinatenfunktionen**, und man schreibt in diesem Fall auch oft $f = (f_1, ..., f_m)$ bzw. verwendet die Vektorschreibweise $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$.

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x, y) = (\sin(x + y), e^{xy}, x - y)$. Dann ist $f_1(x, y) = \sin(x + y)$, $f_2(x, y) = e^{xy}$, $f_3(x, y) = x - y$.

Mit dem Folgenkriterium der Stetigkeit und dem Satz über die koordinatenweise Konvergenz folgt (fast) unmittelbar

Satz. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig an $x^0 \in D(f)$ wenn f_i stetig an $x^0 \in D(f)$ ist für jedes $1 \leq i \leq m$.

(Vgl. Lineare Algebra) Die einfachsten Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sind die linearen Abbildungen, i.e. Abbildungen der Form

$$y_1 = f_1(x_1, ..., x_n) = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n$$

$$y_2 = f_2(x_1, ..., x_n) = a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n$$

$$...$$

$$y_m = f_m(x_1, ..., x_n) = a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \ .$$

Lineare Abbildungen lassen sich auch in der kompakten Form $y = Ax$ angeben, wobei A eine $m \times n$ Matrix ist.

Satz. Jede lineare Abbildungen ist stetig.

Beweis. Sei $y = Ax$ eine lineare Abbildung, A eine $m \times n$ Matrix, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $M > 0$ mit $|a_{ij}| \leq M \ \ \forall \, i, j$.

Dann ist $|f_i(x) - f_i(x^0)| = |a_{i1}(x_1 - x_1^0) + ... + a_{in}(x_n - x_n^0)| \leq$

$\leq M(|x_1 - x_1^0| + ... + |x_n - x_n^0|) \leq Mn\|x - x^0\|$ (Maximumsnorm) .

Mit der Wahl von $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{Mn}$ ergibt sich die Behauptung. $\square$