Stammfunktionen, Hauptsätze, unbestimmtes Integral

Sei I ein Intervall , f beschränkt auf I und R-integrierbar für jedes $[a,b] \subseteq I$, und $x_0 \in I$.

Dann heißt die Funktion F mit $D(F) = I$ und

$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$ **Integral von** f als Funktion der oberen Grenze (bzw. kurz Integralfunktion) .

Bemerkung. F ist stetig auf I .

Beweis. Sei $x \in I$. Wähle $[a,b]$ mit $x \in [a,b] \subseteq I$. Auf $[a,b]$ gelte $|f(x)| \leq M$. Sei nun (x_n) eine Folge aus $[a,b]$ mit $x_n \to x$. Dann gilt

$$|F(x_n) - F(x)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x_n} f(t)dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt \right| = \left| \int\limits_{x}^{x_n} f(t)dt \right| \leq \left| \int\limits_{x}^{x_n} |f(t)|dt \right| \leq$$

$\leq M|x_n - x|$. Daraus folgt $F(x_n) \to F(x)$. $\square$

Satz. (**1. Hauptsatz** der Differential- und Integralrechnung)

f stetig an $x \in I \Rightarrow F$ differenzierbar in x und $F'(x) = f(x)$.

Beweis. Sei (x_n) eine Folge aus I mit $x_n \neq x$, $x_n \to x$. Sei weiters $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus der Stetigkeit von f an x folgt :

$\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ mit $|t - x| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$.

Weiters $\exists\, N_\varepsilon$ mit $|x_n - x| < \delta_\varepsilon$ für $n > N_\varepsilon$.

Für $n > N_\varepsilon$ gilt dann

$$\left| \tfrac{F(x_n)-F(x)}{x_n-x} - f(x) \right| = \left| \tfrac{1}{x_n-x} \left\{ \int\limits_{x_0}^{x_n} f(t)dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt \right\} - f(x) \right| =$$

$$= \left| \tfrac{1}{x_n-x} \int\limits_{x}^{x_n} f(t)dt - f(x) \right| = \tfrac{1}{|x_n-x|} \left| \int\limits_{x}^{x_n} (f(t) - f(x))dt \right| \leq$$

$$\left|\frac{1}{|x_n-x|}\int\limits_x^{x_n}|f(t)-f(x)|dt\right| \leq \frac{1}{|x_n-x|}\varepsilon|x_n-x| = \varepsilon \ .$$

Dies bedeutet aber $\left|\frac{F(x_n)-F(x)}{x_n-x} - f(x)\right| \to 0$. $\square$

Definition. Die Funktionen f und F seien auf dem Intervall I definiert, F sei dort differenzierbar und es gelte $F'(x) = f(x)$.

Dann heißt F **Stammfunktion** von f auf I .

Beispiel. $x^3 + x + 4$ ist eine Stammfunktion von $3x^2 + 1$, $e^x + \sin x + 1$ ist eine Stammfunktion von $e^x + \cos x$.

Bemerkung. Jede auf I stetige Funktion besitzt dort eine Stammfunktion, nämlich $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$.

Sind $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$ auf I , dann gilt für $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$, dass $\varphi'(x) = 0$ auf I.

Dann ist aber $\varphi = C$ .. const., also $F_1(x) = F_2(x) + C$. Somit unterscheiden sich zwei Stammfunktionen nur durch eine additive Konstante.

Satz. (**2. Hauptsatz** der Differential- und Integralrechnung)

Sei f stetig auf $[a,b]$ und F eine Stammfunktion von f auf $[a,b]$. Dann gilt

$$\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \ .$$

Beweis. $F_1(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ ist ebenfalls eine Stammfunktion, daher existiert eine Konstante C mit $F_1(x) = F(x) + C$.

Mit $x = a$ erhalten wir $0 = F_1(a) = F(a) + C$.

Mit $x = b$ erhalten wir $F_1(b) = \int\limits_a^b f(t)dt = F(b) + C$.

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert die Behauptung. $\square$

Bemerkung. Die obige Aussage gilt auch unter der schwächeren Voraussetzung, dass f lediglich R-integrierbar auf $[a,b]$ ist.

Anmerkungen.

(i) Oft schreibt man $\int\limits_a^b f(t)dt = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

(ii) Ist f R-integrierbar auf $[a,b]$, dann folgt daraus **nicht** notwendigerweise, dass f eine Stammfunktion auf $[a,b]$ besitzt.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{wenn } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{wenn } 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad \text{keine Stammfunktion auf } [-1,1] .$$

(iii) Hat f auf $[a,b]$ eine Stammfunktion, dann ist f **nicht** notwendigerweise R-integrierbar.

Beispiele.

1) $\int\limits_a^b e^t dt \ : \ f(x) = e^x \ , \ F(x) = e^x \ \Rightarrow \ \int\limits_a^b e^t dt = e^b - e^a$

2) $\int\limits_0^b \sqrt{t}dt \ : \ f(x) = \sqrt{x} \ , \ F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} \ \Rightarrow \ \int\limits_0^b \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}b^{3/2}$

3) $\int\limits_1^2 \frac{1}{t}dt \ : \ f(x) = \frac{1}{x} \ , \ F(x) = \ln x \ \Rightarrow \ \int\limits_1^2 \frac{1}{t}dt = \ln x|_1^2 = \ln 2$

Definition. Sei f auf dem Intervall I definiert und besitze dort eine Stammfunktion.

$\int f(x)dx = \{F \ : \ F$ ist Stammfunktion von f auf $I\}$ nennt man dann **unbestimmtes Integral** .

(Das unbestimmte Integral von f ist also per definition die "Klasse" aller Stammfunktionen von f . Diese läßt sich stets mit Hilfe einer speziellen Stammfunktion $F(x)$ in der Form $F(x) + C$ ausdrücken)

Da Differentiation und Integration zueinander "inverse" Prozesse sind, lassen sich bereits viele Stammfunktionen angeben, z.B.

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad \text{, weil} \quad \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Weitere Beispiele.

a) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ auf $I = (0, \infty)$ und für $\alpha \neq -1$

b) $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ auf $I = (0, \infty)$

c) $\int e^x dx = e^x + C$ auf $\mathbb{R}$

d) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + C$ auf $I = (-1, 1)$

e) $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$ auf $\mathbb{R}$

f) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$ auf $\mathbb{R}$

etc.

Satz. (Linearität des unbestimmten Integrals)

Wenn die Funktionen f und g auf I Stammfunktionen F bzw. G besitzen, dann auch die Funktion $\lambda f + \mu g$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ und es gilt

$$\int (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda F(x) + \mu G(x) = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx \ .$$

Beweis. $\lambda F(x) + \mu G(x)$ ist eine Stammfunktion von $\lambda f(x) + \mu g(x)$, weil

$$(\lambda F(x) + \mu G(x))' = \lambda F'(x) + \mu G'(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) \ . \quad \square$$

Wir diskutieren nun verschiedene Möglichkeiten zur Bestimmung von Stammfunktionen.

1) Integration durch Substitution

Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ und sei $x = u(\xi)$. Dann ist $G(\xi) = F(u(\xi))$ nach der Kettenregel offenbar eine Stammfunktion von

$f(u(\xi))u'(\xi)$.

($G'(\xi) = \frac{dF}{dx}(u(\xi))u'(\xi) = f(u(\xi))u'(\xi)$)

Beispiel. $F(x) = x^2$ ist Stammfunktion von $f(x) = 2x$. Mit $x = \sin\xi$ gilt also, dass $G(\xi) = \sin^2\xi$ eine Stammfunktion von $2\sin\xi\cos\xi$ ist.

D.h. $\int 2\sin\xi\cos\xi d\xi = \sin^2\xi + C$.

Gilt $x = u(\xi)$ und $\xi = u^{-1}(x)$, und ist $G(\xi)$ eine Stammfunktion von $f(u(\xi))u'(\xi)$, dann ist wiederum nach der Kettenregel $F(x) = G(u^{-1}(x))$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

($F'(x) = \frac{dG}{d\xi}(u^{-1}(x))\frac{du^{-1}}{dx} = f(u(u^{-1}(x)))\frac{du}{d\xi}\frac{du^{-1}}{dx} = f(x)$)

Beispiele.

1) Betrachte $\int \sin\frac{5x+1}{2}dx$. Setze $\xi = \frac{5x+1}{2}$ bzw. $x = u(\xi) = \frac{2\xi-1}{5}$.

Dann ist $u'(\xi) = \frac{2}{5}$ und $f(u(\xi))u'(\xi) = \frac{2}{5}\sin\xi$, welche die Stammfunktion $G(\xi) = -\frac{2}{5}\cos\xi$ besitzt.

Damit ist $F(x) = G(u^{-1}(x)) = -\frac{2}{5}\cos\frac{5x+1}{2}$ eine Stammfunktion von $\sin\frac{5x+1}{2}$, i.e.

$$\int \sin\frac{5x+1}{2}dx = -\frac{2}{5}\cos\frac{5x+1}{2} + C \ .$$

Informell : $\xi = \frac{5x+1}{2}$, $\frac{d\xi}{dx} = \frac{5}{2}$ bzw. $dx = \frac{2}{5}d\xi$. Wir erhalten $\int \frac{2}{5}\sin\xi d\xi = -\frac{2}{5}\cos\xi + C$. Nun "Rücksubstitution" mittels $\xi = \frac{5x+1}{2}$.

2) Betrachte $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx$. Setze $\xi = 1 + x^3$.

Dann ist $\frac{d\xi}{dx} = 3x^2$ und $\frac{1}{3}d\xi = x^2dx$. Wir erhalten

$$\int \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{\xi}}d\xi = \frac{1}{3}\int \xi^{-\frac{1}{2}}d\xi = \frac{1}{3}2\xi^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\xi} + C = \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3} + C \ .$$

3) Betrachte $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$. Setze $\xi = \sqrt{1+x}$ bzw. $x = -1 + \xi^2$.

Dann ist $\frac{dx}{d\xi} = 2\xi$ bzw. $dx = 2\xi d\xi$. Wir erhalten

$\int \frac{-1+\xi^2}{\xi} 2\xi d\xi = -2\xi + \frac{2}{3}\xi^3 + C$. Rücksubstitution liefert

$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = -2\sqrt{1+x} + \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C$.

2) Partielle Integration

Seien $f(x)$ und $g(x)$ stetig differenzierbar auf einem Intervall I . Dann gilt

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(wobei "=" so zu verstehen ist, dass sich linke und rechte Seite nur um eine Konstante unterscheiden)

Beweis. Aus der Stetigkeit von $f'(x)$ und $g'(x)$ folgt mit dem 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass $f(x)g'(x)$ und $f'(x)g(x)$ jeweils eine Stammfunktion besitzen.

Sei nun $H(x)$ eine Stammfunktion von $f'(x)g(x)$ auf I . Dann hat die rechte Seite die Form $f(x)g(x) - H(x) = R(x)$.

Wegen $R'(x) = (f(x)g(x))' - H'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$ ist $R(x)$ auch Stammfunktion von $f(x)g'(x)$, womit die Behauptung gezeigt ist. $\square$

Beispiele.

1) $I = \int (1+x^2)\cosh x dx$. Setze $f(x) = 1 + x^2$ und $g'(x) = \cosh x$.

Dann ist $f'(x) = 2x$ und $g(x) = \sinh x$.

Damit ist $I = (1+x^2)\sinh x - 2\int x \sinh x dx$.

Erneute partielle Integration mit $u(x) = x$ und $v'(x) = \sinh x$ ergibt

$I = (1+x^2)\sinh x - 2(x\cosh x - \int \cosh x dx) =$

$= (3 + x^2)\sinh x - 2x\cosh x + C$.

2) $I = \int \ln x dx$. Setze $f(x) = \ln x$ und $g'(x) = 1$.

Dann ist $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = x$.

Also ist $I = x\ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x\ln x - x + C$.

3) $I = \int e^x \sin x dx$. Setze $f(x) = e^x$ und $g'(x) = \sin x$.

Dann ist $f'(x) = e^x$ und $g(x) = -\cos x$.

Also ist $I = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$. Erneute partielle Integration mit $u(x) = e^x$ und $v'(x) = \cos x$ ergibt

$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$.

Damit ist $I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$.

3) Integrale rationaler Funktionen

Sei $I = \int R(x)dx$, wobei $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion ist und der Grad von $P(x)$ echt kleiner als der Grad von $Q(x)$ ist.

Partialbruchzerlegung führt auf Integrale der Form

$\int \frac{dx}{(x-c)^m}$ bzw. $\int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2+ax+b)^m} dx$, welche in der Formelsammlung gefunden werden können.

Die vorgestellten Methoden können natürlich auch zur Bestimmung von bestimmten Integralen herangezogen werden.

- Sind f, g stetig differenzierbar auf dem Intervall $[a, b]$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

- Bei einer Substitution $x = u(\xi)$ bzw. $\xi = u^{-1}(x)$ müssen die Grenzen mitsubstituiert werden.

Beispiele.

1) Sei $I = \int_0^1 x \arctan x dx$. Setze $f(x) = \arctan x$, $g'(x) = x$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$. Damit ist

$$I = \int_0^1 x \arctan x dx = \frac{x^2}{2} \arctan x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} (x - \arctan x)\big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(1 - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} .$$

2) Sei $I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$. Setze $1 + e^x = \xi$. Dann ist $\frac{d\xi}{dx} = e^x$ bzw. $d\xi = e^x dx$.

Für $x = 0$ ist $\xi = 2$, und für $x = \ln 2$ ist $\xi = 3$.

Wir erhalten $\int_2^3 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = 2\sqrt{\xi} \ \Big|_2^3 = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

Analog zu den Mittelwertsätzen der Differentialrechnung gibt es auch solche der Integralrechnung. Der 1. MWS der Differentialrechnung besagt, dass es im Intervall (a, b) eine Stelle ξ gibt, an der die Steigung des Graphen von f der Steigung der Sekante entspricht. Analog dazu besagt der 1. MWS der Integralrechnung, dass es eine Stelle $\xi \in (a, b)$ gibt, sodass $\int_a^b f(x)dx$ gleich dem Flächeninhalt eines Rechtecks mit Seitenlängen $b - a$ und $f(\xi)$ ist.

Satz. (**1. Mittelwertsatz der Integralrechnung**)

Sei f stetig auf $[a, b]$. Dann existiert eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a) .$$

Beweis. Die Funktion $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ ist stetig differenzierbar auf $[a, b]$. Anwendung des 1. MWS der Differentialrechnung auf $F(x)$ liefert : $\exists \, \xi \in (a, b)$ sodass $F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a)$ und damit

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a) = f(\xi)(b - a)$. □

Bemerkung. Der vorhergehende Satz läßt sich in folgender Weise erweitern :

Seien f, g stetig auf $[a, b]$ und $g(x) \geq 0$ (bzw. $g(x) \leq 0$) auf $[a, b]$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)dx \ .$$

Bemerkung. (2. Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Auf $[a, b]$ seien f monoton und f' und g stetig. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int\limits_a^\xi g(x)dx + f(b) \int\limits_\xi^b g(x)dx \ .$$