Übungsblatt 3 – Differenzial- und Integralrechnung, WS 09/10

1. **Vergleichs- und Grenzwertkriterium:** Zeigen Sie durch Vergleich mit einer Reihe mit bekanntem Konvergenzverhalten die Konvergenz bzw. Divergenz der folgenden Reihen

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+k+1}{4k^4+2k^2+1}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^3+k+1}{4k^4+2k^2+1}$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+k}\right)^k$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2\, n!}$

2. **Wurzel- und Quotientenkriterium:** Zeigen Sie mittels Wurzel- oder Quotientenkriterium die Konvergenz bzw. Divergenz der folgenden Reihen

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+k}\right)^k$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2\, n!}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{(n^2)}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\, 3^n}$

3. **Alternierende Reihen:** Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-1}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}\,(1+k)}$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, \cos(k\pi)}{k}$

4. **Verdichtungskriterium:** Überprüfen Sie mit Hilfe des Verdichtungskriteriums, ob die folgenden Reihen konvergieren:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,\ln k}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^2}$

5. **Cauchy-Produkt:** Bilden Sie das Cauchy-Produkt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!}\right)$$

   (Hinweis: Summenformel von Bsp. 2 auf Übungsblatt 2)

   Welchen einfachen Weg gibt es, die Richtigkeit der Rechnung zu kontrollieren?

6. **Konvergenz von Funktionenfolgen:** Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionenfolgen (f_n) auf der Grundmenge X punktweise konvergieren und bestimmen Sie die Grenzfunktion. Liegt auch gleichmäßige Konvergenz vor?

   (a) $f_n(x) = x^n(1-x)^n$ auf $X = [0,\,1]$

   (b) „Hutfunktion“

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{für } \frac{1}{n} < x \le \frac{2}{n} \\ 0 & \text{für } x > \frac{2}{n} \end{cases}$$

   auf $X = \mathbb{R}_0^+ = [0,\,\infty)$

   (c) $f_n(x) = n^2\,x^4 e^{-nx^2}$ auf $X = \mathbb{R}_0^+ = [0,\,\infty)$

7. **Konvergenzbereich von Funktionenreihen:** Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet der folgenden Funktionenreihen:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n^4x^2}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

   Ist die Reihe in (a) gleichmäßig konvergent?