Funktionsgrenzwerte, Stetigkeit

Häufig tauchen in der Mathematik Ausdrücke der Form $\lim_{x \to x_0} f(x)$ auf. Derartigen Ausdrücken wollen wir jetzt eine präzise Bedeutung zuweisen.

Definition. $b = \lim_{x \to x_0} f(x)$ wenn für **jede (!!)** Folge (x_n) mit der Eigenschaft $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ gilt, dass $f(x_n) \to b$.

Ist $b \in \mathbb{R}$, dann heißt b **eigentlicher Grenzwert von** f **an der Stelle** x_0 . Für $b = +\infty$ bzw. $b = -\infty$ spricht man von einem **uneigentlichen Grenzwert** von f an der Stelle x_0 .

In dieser Definition sind auch die Möglichkeiten $x_0 = +\infty$ bzw. $x_0 = -\infty$ inkludiert und liefern $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ bzw. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Bemerkung. Man beachte, dass bei dieser Definition die Funktion f an der Stelle x_0 gar nicht definiert zu sein braucht.

Beispiele.

1) Sei $f(x) = \frac{x^m - a^m}{x - a}$. f ist an der Stelle $x_0 = a$ nicht definiert.

Sei nun $x_n \to a$, $x_n \neq a$. Dann ist

$f(x_n) = \frac{x_n^m - a^m}{x_n - a} = \frac{(x_n - a)(x_n^{m-1} + x_n^{m-2}a + \ldots + x_n a^{m-2} + a^{m-1})}{x_n - a} =$

$x_n^{m-1} + x_n^{m-2}a + \ldots + x_n a^{m-2} + a^{m-1} \to m a^{m-1}$.

Damit ist $\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x - a} = m a^{m-1}$.

2) Betrachte $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sei $x_n = \frac{1}{n}$ $\forall\, n$. Dann gilt $x_n \to 0$ und $f(x_n) = n \to +\infty$.

Sei $x_n = -\frac{1}{n}$ $\forall\, n$. Dann gilt $x_n \to 0$ und $f(x_n) = -n \to -\infty$.

Dies bedeutet, dass $\lim_{x \to 0} f(x)$ **nicht** existiert.

Man überlege sich andererseits, dass für jede Folge $x_n \to +\infty$ (bzw.

$x_n \to -\infty)$ gilt: $f(x_n) \to 0$, also $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Bemerkung. (Annäherung entlang von **Richtungen**)

Für eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktionen gibt es nur zwei mögliche Annäherungen an einen Punkt x_0 entlang von Richtungen, nämlich von links oder von rechts. Dementsprechend spricht man vom "linksseitigen Grenzwert" bzw. vom "rechtsseitigen Grenzwert".

Definition.

1) $b = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ wenn für **jede** Folge (x_n) mit $x_n \to x_0$, $x_n < x_0$ gilt, dass $f(x_n) \to b$.

b heißt der **linksseitige Grenzwert** von f an der Stelle x_0 .

2) $c = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ wenn für **jede** Folge (x_n) mit $x_n \to x_0$, $x_0 < x_n$ gilt, dass $f(x_n) \to c$.

c heißt der **rechtsseitige Grenzwert** von f an der Stelle x_0 .

Beispiel. Betrachte $f(x) = \begin{cases} x + \frac{x}{|x|} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$.

Dann ist $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

Eine wichtige Eigenschaft von Funktionen (zwischen metrischen Räumen) ist die sogenannte "Stetigkeit". Dabei geht es um die Idee, dass wenn x "nahe bei" x_0 ist, dann auch $f(x)$ "nahe bei" $f(x_0)$ sein soll. Dieser Idee wird nun eine genaue Bedeutung gegeben.

Definition. Seien (X, d) und (Y, ϱ) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. $D(f) \subseteq X$ sei der Definitionsbereich von f .

i) f heißt **stetig in** x_0 $(x_0 \in D(f))$, wenn

$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ sodass $d(x_0, x) < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow \ \varrho(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$

ii) f heißt **stetig auf** $X_0 \subseteq D(f)$, wenn f stetig in allen Punkten $x_0 \in X_0$ ist.

Bemerkungen.

(i) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist somit genau dann stetig in $x_0 \in D(f)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein zugehöriges $\delta_\varepsilon > 0$ gibt (δ_ε hängt von ε und x_0 ab !) sodass für alle $x \in D(f)$ mit $|x_0 - x| < \delta_\varepsilon$ gilt, dass $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$.

In anderen Worten: Wird ein beliebiges ε-Intervall um $f(x_0)$ vorgegeben, dann existiert dazu ein δ_ε-Intervall um x_0 , welches zur Gänze in das ε-Intervall um $f(x_0)$ abgebildet wird.

(ii) Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann stetig in $z_0 \in D(f)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein zugehöriges $\delta_\varepsilon > 0$ gibt sodass für alle $z \in D(f)$ mit $|z_0 - z| < \delta_\varepsilon$ gilt, dass $|f(z_0) - f(z)| < \varepsilon$.

In anderen Worten: Wird eine beliebige ε-Kreisscheibe um $f(z_0)$ vorgegeben, dann existiert dazu eine δ_ε-Kreisscheibe um z_0 , welche zur Gänze in die ε-Kreisscheibe um $f(z_0)$ abgebildet wird.

Die Stetigkeit in einem Punkt x_0 kann nun mittels konvergenter Folgen charakterisiert werden.

Satz. Seien (X, d) und (Y, ϱ) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) f ist stetig in x_0 ,

2) für **jede** Folge mit $x_n \to x_0$ gilt dass $f(x_n) \to f(x_0)$.

Beweis.
1) $\Rightarrow$ 2) : Gelte $x_n \to x_0$ und sei $\varepsilon > 0$. Laut Voraussetzung gibt es ein $\delta_\varepsilon > 0$ mit $d(x_0, x) < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; \varrho(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$. Weil $x_n \to x_0$ gibt es eine Zahl N_{δ_ε} sodass $d(x_0, x_n) < \delta_\varepsilon$ für $n > N_{\delta_\varepsilon}$.

Damit gilt aber $\varrho(f(x_0), f(x_n)) < \varepsilon$ für $n > N_{\delta_\varepsilon}$, i.e. $f(x_n) \to f(x_0)$.

2) $\Rightarrow$ 1) : Annahme: f sei **nicht** stetig in x_0 .

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass es für jedes $\delta > 0$ einen Punkt x_δ gibt mit $d(x_0, x_\delta) < \delta$, aber $\varrho(f(x_0), f(x_\delta) \geq \varepsilon$.

Im besonderen (setze jeweils $\delta = \frac{1}{n}$) gibt es damit eine Folge (x_n) mit $d(x_0, x_n) < \frac{1}{n}$ aber $\varrho(f(x_0), f(x_n)) \geq \varepsilon$.

Damit gilt $x_n \to x_0$ aber $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$, ein Widerspruch. Also ist f stetig in x_0 . $\square$

Einfache Beispiele.

1) Die **konstante Funktion** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \ \forall\, x$ ist stetig (also stetig in jedem x_0).

2) Die **identische Funktion** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \ \forall\, x$ ist stetig (also stetig in jedem x_0).

Satz. (Die Komposition stetiger Abbildungen ist stetig)

Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen, wobei X , Y , Z metrische Räume sind und $f(X) \subseteq D(g)$ gilt.

Ist dann f stetig in $x_0 \in D(f)$ und g stetig in $f(x_0)$, dann ist $g \circ f$ stetig in x_0 .

Beweis.

Gelte $x_n \to x_0$. Weil f stetig in x_0 ist, gilt $f(x_n) \to f(x_0)$. Weil g stetig in $f(x_0)$ ist, gilt dann weiters $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$, also $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$. $\square$

Bemerkung. Man kann zeigen:

1) Ist X ein metrischer Raum und sind $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 , dann sind auch

$$f(x) \pm g(x) \quad , \quad f(x)g(x) \quad , \quad \tfrac{f(x)}{g(x)} \ \text{(falls } g(x_0) \neq 0\text{)}$$

ebenfalls stetig in x_0 .

2) Die in der LV "Einführung in die mathematischen Methoden" erwähnten

elementaren Funktionen (Polynome, Winkelfunktionen, Exponentialfunktionen etc.) sind stetig.

Beispiele.

a) Weil $f(x) = g(x) = x$ stetig sind, so auch $x \mapsto x^2$ (und mittels vollständiger Induktion) die Funktion $x \mapsto x^n$.

b) Weil $x \mapsto e^x + 3$ und $y \mapsto \sin y$ stetig sind, ist auch die Komposition, also $x \mapsto \sin(e^x + 3)$ stetig.

Eine Überlegung.

Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$. Wegen $x_n \to x_0 \Rightarrow x_n^2 \to x_0^2$ ist f in allen $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig.

Zu $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt es also ein $\delta_\varepsilon(x_0) > 0$ mit der Eigenschaft $|x_0 - x| < \delta_\varepsilon(x_0) \Rightarrow |x_0^2 - x^2| < \varepsilon$.

Fixiert man ε , dann ist zu erwarten, dass $\delta_\varepsilon(x_1)$ kleiner zu wählen ist, wenn $|x_1| > |x_0|$.

Die Frage ist nun, ob man ein "Universal-δ_ε" finden kann, welches für alle Punkte (bzw. für alle Punkte eines bestimmten Bereiches) das Gewünschte leistet. Dies führt zum Begriff der "gleichmäßigen Stetigkeit" .

Definition. Sei $f : X \to Y$, wobei (X, d) und (Y, ϱ) metrische Räume sind.

Dann heißt f **gleichmäßig stetig** auf $X_0 \subseteq D(f)$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein "Universal-δ_ε" $\delta_\varepsilon > 0$ existiert sodass $d(x_1, x_2) < \delta_\varepsilon \Rightarrow \varrho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Bemerkungen.

1) Man mache sich den Unterschied zwischen "Stetigkeit" und "gleichmäßiger Stetigkeit" klar !

2) Gleichmäßige Stetigkeit ist stets bezogen auf eine Teilmenge (und nicht

auf einen Punkt).

3) Klarerweise gilt : f gleichmäßig stetig auf $X_0 \;\Rightarrow\; f$ stetig in jedem $x_0 \in X_0$.

Aber: $f(x) = x^2$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, aber dort nicht gleichmäßig stetig (Aufgabe).

Der folgende **sehr wichtige** Satz streicht die Bedeutung von kompakten Mengen hervor und wird eventuell zu einem späteren Zeitpunkt gezeigt.

Satz. Seien (X, d) und (Y, ϱ) metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig auf $X_0 \subseteq D(f)$.

1) Ist X_0 kompakt, dann ist auch $f(X_0)$ kompakt.

2) Ist X_0 kompakt, dann ist f auch gleichmäßig stetig auf X_0 .

Bemerkung. $f(x) = x^2$ ist **nicht** gleichmäßig stetig auf $X_0 = \mathbb{R}$, aber gleichmäßig stetig auf z.B. einem kompakten Intervall $X_0 = [a, b]$.

Für Funktionen $f : \mathbb{R} \to Y$ kann nun auch die sogenannte "einseitige Stetigkeit" erklärt werden.

Dabei heißt f **linksseitig (**bzw. **rechtsseitig) stetig in** x_0, wenn gilt:

$\forall\ (x_n)$ mit $x_n \to x_0$ und $x_n \leq x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$ bzw.

$\forall\ (x_n)$ mit $x_n \to x_0$ und $x_n \geq x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$

Bemerkung. Offenbar ist $f : \mathbb{R} \to Y$ genau dann stetig in x_0 , wenn f linksseitig und rechtsseitig stetig in x_0 ist.

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $f(x) = 1$ für $x > 0$ ist linksseitig stetig in $x_0 = 0$, aber nicht rechtsseitig stetig.

Bemerkung. Es gelte $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = b$.

Setzen wir nun den Funktionswert an der Stelle x_0 durch $f(x_0) = b$ fest, dann erhalten wir eine in x_0 stetige Funktion. Man spricht hier auch von der **stetigen Ergänzbarkeit**.

Beispiel. Die Funktion $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht definiert.

Offenbar gilt aber $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4$. Wir können damit an der Stelle $x_0 = 2$ den Funktionswert $f(2) = 4$ setzen und erhalten eine in $x_0 = 2$ stetige Funktion.

Für Funktionen lassen sich auch geeignete Beschränktheitsbegriffe erklären.

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

1) $f : X \to \mathbb{R}$ heißt auf $X_0 \subseteq D(f)$ **nach oben (bzw. nach unten) beschränkt**, wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt mit $f(x) \leq M$ (bzw. $f(x) \geq M$) für alle $x \in X_0$.

2) $f : X \to \mathbb{R}$ heißt auf $X_0 \subseteq D(f)$ **beschränkt**, wenn f sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist, d.h. wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in X_0$.

3) $f : X \to \mathbb{C}$ heißt auf $X_0 \subseteq D(f)$ **beschränkt**, wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in X_0$.

Bemerkungen.

(i) Sind f, g beschränkt auf X_0 , dann auch $f \pm g$ und $f \cdot g$.

(ii) Sei $f : X \to \mathbb{R}$ auf $X_0 \subseteq X$ beschränkt. Dann existieren $\sup\limits_{x \in X_0} f(x)$ und $\inf\limits_{x \in X_0} f(x)$, müssen aber nicht auf X_0 angenommen werden.

Betrachte etwa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ und $X_0 = (0, 1)$. Dann ist $\sup\limits_{x \in X_0} f(x) = 1$ und $\inf\limits_{x \in X_0} f(x) = 0$. Diese werden jedoch auf X_0 nicht angenommen.

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$. Dann hat f an der Stelle $x_0 \in X_0 \subseteq D(f)$ ein

i) **absolutes Maximum auf** X_0 , wenn $\forall\, x \in X_0 \;\; f(x) \leq f(x_0)$.

ii) **absolutes Minimum auf** X_0 , wenn $\forall\, x \in X_0 \;\; f(x) \geq f(x_0)$.

iii) $x_0 \in X_0 \subseteq D(f)$ heißt **Nullstelle** wenn $f(x_0) = 0$.

Satz. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig auf X_0 . Ist X_0 **kompakt**, dann hat f auf X_0 ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum.

Beweis. Laut vorherigem Satz ist $f(X_0)$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$, also beschränkt und abgeschlossen. Damit gilt $\exists \sup\limits_{x \in X_0} f(x)$, $\inf\limits_{x \in X_0} f(x)$ und $\sup\limits_{x \in X_0} f(x)$, $\inf\limits_{x \in X_0} f(x) \in f(X_0)$ (weil $f(X_0)$ abgeschlossen ist) . $\square$

Häufig interessiert man sich allerdings lediglich für das lokale Verhalten von f in einer Umgebung von x_0 .

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$, $X_0 \subseteq X$ und $f : X \to \mathbb{R}$.

(i) $U(x_0) \subseteq X$ heißt **Umgebung** von x_0 , wenn ein $\delta > 0$ existiert mit $K(x_0, \delta) \subseteq U(x_0)$.

(ii) f hat an der Stelle x_0 ein **relatives Maximum auf** X_0, wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 gibt mit $f(x) \leq f(x_0) \;\; \forall\, x \in X_0 \cap U(x_0)$

(iii) f hat an der Stelle x_0 ein **relatives Minimum auf** X_0, wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 gibt mit $f(x) \geq f(x_0) \;\; \forall\, x \in X_0 \cap U(x_0)$

Zwischenwerteigenschaften stetiger Funktionen.

Es scheint intuitiv klar zu sein, dass eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, bei der $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliches Vorzeichen besitzen, an einer Zwischenstelle des Intervalls eine Nullstelle haben muß. Dies ist allerdings nicht ganz trivial und beruht auf der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Satz. (**Nullstellensatz** von Bolzano)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig auf dem Intervall $[a, b]$ und es gelte $f(a) \cdot f(b) < 0$ (d.h. $f(a)$ und $f(b)$ haben unterschiedliches Vorzeichen).

Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$, i.e. f hat in (a, b) mindestens eine Nullstelle.

Beweis. oBdA sei $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Wir setzen $I_0 = [a, b]$. Durch Halbierung von I_0 erhalten wir zwei Teilintervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$ und $[\frac{a+b}{2}, b]$, von denen bei einem, etwa $I_1 = [a_1, b_1]$, gilt $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$ gilt.

Durch fortwährende Intervallhalbierung erhalten wir eine Folge $I_n = [a_n, b_n]$ von Intervallen mit $I_{n+1} \subseteq I_n$, $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ und $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$.

Offenbar ist die Folge (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt (durch b) , (b_n) ist monoton fallend und nach unten beschränkt (durch a) . Also sind beide Folgen konvergent. Man überlege sich, dass die Grenzwerte gleich sein müssen, i.e. $\exists\, \xi \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$.

Wir wollen nun zeigen, dass $f(\xi) = 0$. Dazu nehmen wir an, dass $f(\xi) = \alpha > 0$ (analog wird die Annahme $f(\xi) < 0$ behandelt) . Weil f stetig in $x_0 = \xi$ ist, gibt es zu $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(\xi)| < \frac{\alpha}{2}$ für alle $|x - \xi| < \delta$.

Wegen $-\frac{\alpha}{2} < f(x) - f(\xi) < \frac{\alpha}{2}$ gilt $f(x) > \frac{\alpha}{2}$ für alle $|x - \xi| < \delta$. Andererseits, weil $a_n \to \xi$, $\exists\, n$ mit $|a_n - \xi| < \delta$, und somit $f(a_n) > \frac{\alpha}{2} > 0$, ein Widerspruch.

Damit muß $f(\xi) = 0$ sein. $\square$

Dieser Satz läßt sich nun in einfacher Weise erweitern zum sogenannten Zwischenwertsatz.

Satz. (**Zwischenwertsatz**)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Für $a < b \in \mathbb{R}$ gelte dass $f(a) \neq f(b)$, etwa $f(a) < f(b)$ (analog wird der Fall $f(a) > f(b)$ behandelt).

Dann gibt es für ein beliebiges η mit $f(a) < \eta < f(b)$ ein $\xi \in [a, b]$ mit

$f(\xi) = \eta$, d.h. jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird angenommmen.

Beweis. Sei $g(x) = f(x) - \eta$. Dann ist g stetig auf $[a, b]$ mit $g(a) < 0$ und $g(b) > 0$. Nach dem Nullstellensatz existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $g(\xi) = 0$, i.e. $f(\xi) = \eta$. $\square$

Folgerung. Das stetige Bild eines Intervalls ist wieder ein Intervall.

Monotone Funktionen.

Definition. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt auf $X \subseteq D(f)$

i) **monoton wachsend** (bzw. streng monoton wachsend), wenn

$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{bzw. } f(x_1) < f(x_2))$

ii) **monoton fallend** (bzw. streng monoton fallend), wenn

$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2) \quad (\text{bzw. } f(x_1) > f(x_2))$

ii) **monoton** (bzw. streng monoton), wenn f entweder (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Bemerkung. Monotone Funktionen haben die Eigenschaft, dass stets linksseitiger bzw. rechtsseitiger Grenzwert existieren, i.e. ist f auf dem Intervall (a, b) definiert und dort monoton, dann existieren $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ für jedes $x_0 \in (a, b)$.

Daraus folgt, dass monotone Funktionen als Unstetigkeitsstellen nur Sprungstellen haben können.

Die besondere Bedeutung monotoner Funktionen zeigt sich an der Frage der Existenz der Umkehrfunktion.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ **streng** monoton. Dann ist f offenbar injektiv. Bezeichnen wir mit $B(f)$ den Bildbereich von f , dann ist

$f : A \to B(f)$ bijektiv.

Also existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : B(f) \to A$.

Sei etwa f streng monoton wachsend , $y_1, y_2 \in B(f)$ mit $y_1 < y_2$. Wir setzen $x_1 = f^{-1}(y_1)$ und $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Wäre $x_1 \geq x_2$, dann $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$, also muß $x_1 < x_2$ sein und somit ist f^{-1} ebenfalls streng monoton wachsend.

(Analog zeigt man, dass die Umkehrfunktion einer streng monoton fallenden Funktion wieder streng monoton fallend ist.)

Satz. Sei f stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend) auf $X \subseteq \mathbb{R}$.

Ist X kompakt, dann ist f^{-1} stetig auf $f(X)$.

Beweis.

Sei $y_0 \in f(X)$ und (y_n) eine Folge in $f(X)$ mit $y_n \to y_0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $x_0, x_n \in X$ mit $f(x_0) = y_0$ und $f(x_n) = y_n$, i.e. $x_0 = f^{-1}(y_0)$ und $x_n = f^{-1}(y_n)$.

Annahme: (x_n) konvergiert **nicht** gegen x_0 . Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $|x_0 - x_{n_k}| \geq \varepsilon$. Weil X kompakt ist, hat (x_{n_k}) einen Häufungspunkt $x \in X$ (Bolzano-Weierstrass) . Also gibt es eine Teilfolge $(x_{n_{k_i}})$ von (x_{n_k}) mit $x_{n_{k_i}} \to x$.

Aus der Stetigkeit von f folgt, dass $y_{n_{k_i}} = f(x_{n_{k_i}}) \to f(x)$. Weil weiters $y_{n_{k_i}} \to y_0$, gilt $y_0 = f(x)$ und damit $x = x_0$, ein Widerspruch.

Damit gilt $x_n = f^{-1}(y_n) \to x_0 = f^{-1}(y_0)$, i.e. f^{-1} ist stetig. $\square$

Bemerkung. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Dann ist $B(f)$, der Bildbereich von f , wieder ein offenes (!) Intervall.

Man kann zeigen, dass in diesem Fall die Umkehrfunktion $f^{-1} : B(f) \to (a,b)$ ebenfalls stetig ist.

Folgen und Reihen von Funktionen.

Sehr häufig treten in der Mathematik Folgen bzw. Reihen von Funktionen auf. Ist etwa (f_n) eine Folge von Funktionen, dann können wir uns für ein **festes** x fragen, ob die entstandene Zahlenfolge $(f_n(x))$ konvergiert oder nicht.

Beispiel. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Man kann zeigen, dass für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ die entstandene Zahlenfolge gegen e^x konvergiert.

Ebenso kann gezeigt werden, dass für ein festes $x \in \mathbb{R}$ die Zahlenreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ die Summe e^x hat.

Eine Besonderheit von Funktionenfolgen bzw. -reihen ist, dass es dabei mehrere wichtige Konvergenzbegriffe gibt. Wir beschäftigen uns im folgenden mit der "punktweisen Konvergenz" und der "gleichmäßigen Konvergenz".

Sei nun eine Folge (f_n) von Funktionen gegeben, wobei jedes f_n auf der Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ (bzw. $X \subseteq \mathbb{C}$) definiert ist. Für ein festes $x \in X$ liegt dann eine Zahlenfolge vor, welche auf Konvergenz untersucht werden kann.

Definition.

(i) (f_n) heißt **punktweise konvergent** an der Stelle $x \in X$, wenn die Zahlenfolge $(f_n(x))$ konvergiert.

$X_K = \{x \in X \ : \ (f_n(x)) \text{ konvergiert}\}$ heißt dann die **Konvergenzmenge** der Folge (f_n) .

(ii) Die Funktion f mit Definitionsbereich X_K und $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ heißt die **Grenzfunktion** von (f_n) .

Die "Nachteile" der bloßen punktweisen Konvergenz werden an folgenden Beispielen ersichtlich.

Beispiele.

1) Sei $X = [0,1]$ und $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^2x^2}$. Dann ist $X_K = X$ und $f(x) = \frac{1}{x}$ wenn $0 < x \leq 1$ sowie $f(x) = 0$ für $x = 0$.

D.h. die Grenzfunktion einer Folge von beschränkten Funktionen kann unbeschränkt sein, die Grenzfunktion einer Folge von stetigen Funktionen kann unstetig sein (zum Begriff der Stetigkeit siehe später).

2) Sei $X = [0, \infty)$ und $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$. Dann ist $X_K = X$ und $f(x) = 0 \ \forall \ x \in X_K$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\int\limits_0^\infty f_n(x)dx = 1$, aber $\int\limits_0^\infty f(x)dx = 0$.

D.h. Integration und Grenzwertbildung können im allgemeinen **nicht** vertauscht werden.

3) Sei $X = \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$. Dann ist $X_K = X$ und es gilt $f(x) = 0 \ \forall \ x \in X_K$.

Da die Folge der Ableitungen $(f_n'(x)) = (\sqrt{n} \cos nx)$ für kein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, sind also Differentiation und Grenzwertbildung im allgemeinen ebenfalls **nicht** vertauschbar.

Bemerkung. Die punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge (f_n) gegen f auf einer Menge X bedeutet, dass es zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N_\varepsilon(x)$ gibt, sodass für alle $n > N_\varepsilon(x)$ gilt, dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Die Frage, die sich nun stellt, ist : Kann ein von x unabhängiges N_ε gewählt werden. Es ist zu erwarten, dass dies von der betrachteten Menge X abhängt.

Beispiel.

Sei $X = (0,1)$ und $f_n(x) = x^n$. Dann ist $f(x) = 0 \ \forall \ x \in X$.

Ist $0 < \varepsilon < 1$ gegeben, dann erhalten wir für das zugehörige $N_\varepsilon(x)$:

$|f_n(x) - f(x)| = x^n < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$. Der Ausdruck $\frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$ wird aber unbeschränkt für $x \to 1$.

Also kann es kein "universelles" N_ε auf $(0,1)$ geben.

Betrachten wir hingegen $f_n(x) = x^n$ auf $X = (0, \frac{1}{2})$ und setzen $N_\varepsilon = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{1}{2}}$ für ein $0 < \varepsilon < 1$, dann gilt für alle $n > N_\varepsilon$ und **für alle** $x \in X$, dass

$|f_n(x) - f(x)| = x^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$.

N_ε hängt hier also **nicht** von x ab.

Definition. Die Funktionenfolge (f_n) heißt **gleichmäßig konvergent gegen** f **auf** X , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine (von x unabhängige) Zahl N_ε gibt, sodass für alle $n > N_\varepsilon$ und alle $x \in X$ gilt :

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Schreibweise : $f_n(x) \underset{X}{\rightarrow} f(x)$ oder $f_n(x) \underset{glm}{\rightarrow} f(x)$.

Bemerkung. Gleichmäßige Konvergenz bedeutet anschaulich, dass die Graphen von $f_n(x)$ für alle $n > N_\varepsilon$ in einem 2ε-Streifen um den Graphen von $f(x)$ liegen.

Beispiel. Sei $X = [1, \infty)$ und $f_n(x) = e^{-nx}$. Dann ist $f(x) = 0 \ \forall\, x \in X$.

Wegen $|f_n(x) - f(x)| = e^{-nx} \leq e^{-n} < \varepsilon$ für $n > \ln \frac{1}{\varepsilon}$ und $0 < \varepsilon < 1$ gilt, dass die Funktionenfolge gleichmäßig auf X konvergiert.

Die nachstehende Aussage wird gelegentlich zum Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz verwendet.

Satz. (**Cauchy-Kriterium**) Folgende Aussagen sind gleichwertig :

1) $f_n(x) \underset{X}{\rightarrow} f(x)$

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, N_\varepsilon \ \forall\, n, m > N_\varepsilon$ und $\forall\, x \in X \ : \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Die folgenden wichtigen Eigenschaften der gleichmäßigen Konvergenz seien ohne Beweis angeführt :

Satz. Es gelte $f_n(x) \underset{X}{\rightarrow} f(x)$.

1) Sind alle f_n beschränkt auf X , dann auch f .

2) Sind alle f_n stetig auf X , dann auch f .

3) Ist $X = [a, b]$ und jedes f_n Riemann-integrierbar auf $[a, b]$, dann ist auch f Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ und es gilt

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx \ .$$

(D.h. Integration und Grenzwertbildung können vertauscht werden)

Satz. Seien die Funktionen $f_n(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ differenzierbar. Für mindestens ein $x_0 \in [a, b]$ sei $(f_n(x_0))$ konvergent.

Des weiteren sei die Folge der Ableitungen (f_n') gleichmäßig konvergent auf $[a, b]$. Dann gilt

(i) (f_n) konvergiert gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen eine Funktion f ,

(ii) f ist auf $[a, b]$ differenzierbar,

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right) = f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$

Die Konvergenz einer Zahlenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ wurde bekanntlich auf die Konvergenz der zugehörigen Folge (s_n) der Partialsummmen zurückgeführt, wobei $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Gilt $s_n \to s$, dann heißt s die Summe der Reihe und $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Dieses Prinzip kommt auch bei der Betrachtung von Funktionenreihen zum Tragen. Sind Funktionen $a_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$ gegeben, dann betrachten wir zu einer Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ die zugehörige Funktionenfolge der Partialsummen $A_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$.

Dementsprechend heißt eine Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **punktweise konvergent an** $x \in X$, wenn die Zahlenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ konvergiert, i.e. wenn $(A_n(x))$ konvergiert.

Diejenigen $x \in X$, wo Konvergenz vorliegt, bilden wiederum die Konvergenzmenge X_K , und die auf X_K definierte Funktion A mit $A(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ heißt die **Summenfunktion** der Funktionenreihe .

Die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt auf einer Menge X **gleichmäßig konvergent** zur Summenfunktion A , wenn $A_n(x) \underset{X}{\rightarrow} A(x)$.

Man verwendet dabei auch die Schreibweise $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) \underset{X}{=} A(x)$.

Die Anwendung des Cauchy-Kriteriums für Funktionenfolgen liefert

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \underset{X}{=} A(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N_\varepsilon \;\; \forall\, n \geq m > N_\varepsilon \;\text{ und }\; \forall\, x \in X \;:\; \Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x)\Big| < \varepsilon$$

Damit kann ein eminent wichtiges Kriterium bewiesen werden

Satz. (**Weierstrass**)

Besitzen die auf X definierten Funktionen $a_k(x)$ dort die Abschätzung $|a_k(x)| \leq c_k$ und konvergiert die Zahlenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, dann konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ gleichmäßig auf X .

Beweis. Weil $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergiert und die Folge der Partialsummen damit eine Cauchy-Folge ist, gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N_\varepsilon \;\; \forall\, n \geq m > N_\varepsilon \;:\; \sum_{k=m+1}^{n} c_k < \varepsilon \;.$$

Damit gilt aber für alle $x \in X$

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} c_k < \varepsilon \ . \quad \square$$

Aus den entsprechenden Aussagen über Funktionenfolgen ergeben sich analoge Aussagen über Funktionenreihen betreffend Stetigkeit der Summenfunktion sowie "gliedweise" Integration und Differentiation.

Beispiel. Die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$ konvergiert nach dem Weierstrass-Kriterium auf $[-q, q]$, $q < 1$ gleichmäßig (weil $|(-1)^k x^{2k}| \leq q^{2k}$) und hat dort die Summenfunktion $\frac{1}{1+x^2}$.

Mit $\arctan t = \int\limits_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_0^t \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \right) dx$ erhalten wir

$$\arctan t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^t x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \ .$$