

Differenzial- und Integralrechnung

Übungsblatt 7

WS 11/12

1. Differenzierbarkeit:

(a) Bestimmen Sie jene $n \in \mathbb{N}$, für welche die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

an der Stelle $x = 0$ stetig bzw. differenzierbar ist.

(b) Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sinh(x)}{x^2} & \text{für } 0 < x \leq 2 \\ ax + b & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass sowohl $f(x)$ als auch $f'(x)$ in $(0, \infty)$ stetig sind.

2. Bestimmen von Parametern:

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x) = (1 + x) \ln(a + bx^2 + cx^3)$$

Bestimmen Sie die drei reellen Parameter a, b und c so, dass $f(1) = 1$, $f(2) = 0$, $f(0) + f'(0) = 1$.

3. 1. Mittelwertsatz:

(a) Beweisen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$:

$$e^x(y - x) < e^y - e^x < e^y(y - x)$$

Hinweis: Wenden Sie den 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf die Funktion $f(t) = e^t$ an.

(b) Zeigen Sie für $x > 1$:

$$e^{\frac{1}{x}} < \frac{ex^2}{x^2 + x + 1}$$

Hinweis: Wenden Sie den 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf die Funktion $f(t) = e^{\frac{1}{t}}$ an.

4. Mittelwertsätze:

(a) Ermitteln Sie ein $\xi \in (0, 1)$ so, dass für die Funktion $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1+x}{2}$ gilt:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(\xi)$$

(b) Beweisen Sie für $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$:

$$\cot y < \frac{\sin y - \sin x}{\cos x - \cos y} < \cot x.$$

Hinweis: Wenden Sie den 2.Mittelwertsatz der Differentialrechnung an.

5. **Ableitungen:** Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen und vereinfachen Sie die Lösungen falls möglich:

(a) $f(x) = x^7 + 6x^3 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^5} - \sqrt{x} + \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}}$

(b) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

(c) $f(x) = \frac{e^{x^3}-x}{e^{x^3}+7}$

(d) $f(x) = \arcsin(2x - 3)$

(e) $f(x) = \ln(x^3 \ln x + x)$

(f) $f(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad 0 < x < 1$