Differenzial- und Integralrechnung

Übungsblatt 8

WS 11/12

---

1. **Unbestimmte Ausdruecke:**

   Bestimmen Sie mit Hilfe der Regeln von de L'Hospital den Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

   (a) $f(x) = \sin x \qquad g(x) = x$

   (b) $f(x) = 1 - \cos x \qquad g(x) = x^2$

2. **Satz von Taylor, Taylor-Reihen:**

   (a) Wie genau wird $\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180})$ durch das zweite Taylorpolynom (mit Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{3}$) der Cosinusfunktion approximiert?
   Bemerkung: Verwenden Sie dabei die im Skript erwaehnte Abschaetzung fuer das Lagrangesche Restglied:

   $$|R_{n+1}(x, x_0)| \quad \leq \quad M \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad\qquad x \in [a, b], M \in \mathbb{R}.$$

   (b) Zeigen Sie, dass sich die Reihenentwicklungen der Funktionen

   $$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \qquad\qquad g(x) = e^x$$

   um dem Punkt $x = 0$ erst ab einer hoeheren Ordung in x unterscheiden.

3. **Extrema, Wendepunkte, Konvexitaet:**

   An welchen Stellen kann die Funktion

   $$f(x) = x^4 - 4x^2 \qquad\qquad x \in \mathbb{R},$$

   lokale Extrema haben? Berechnen Sie diese und skizzieren Sie die Funktion.

4. **Der n-dimensionale Raum:**

   Seien v und u Elemente des Vektorraums V ueber dem Koerper K und λ Element aus K, dann muss eine Norm $||.||$ auf diesem Raum folgende Eigenschaften erfuellen:

   - $||v|| \geq 0$
   - $||\lambda v|| = |\lambda|\, ||v||$
   - $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$

   (a) Zeigen Sie, dass die Maximumsnorm $||v||_\infty := max\, ||x_i||$ die oben angegebenen Eigenschaften erfuellt.

   (b) Die Norm sei durch das Skalarprodukt definiert: $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\sum_i v_i^2}$. Zeigen Sie wiederum, dass oben angegebene Eigenschaften erfuellt werden.

5. **Partielle Ableitungen:**

   Bilden Sie alle partiellen Ableitungen der Funktion $f(x, y) = x^3 y - e^{xy}$ bis zur dritten Ordnung.