Reelle Folgen

Der Begriff der "Folge" ist ein grundlegender Baustein der Analysis, weil damit u.a. Grenzprozesse definiert werden können. Er beschreibt den Sachverhalt einer "Abfolge von Elementen", wobei die Reihenfolge bzw. Numerierung wesentlich ist.

Definition. Eine **reelle Folge** ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Schreibweisen : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (a_n) , $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ (wobei $a_n = f(n)$)

In diesem Kapitel untersuchen wir ausschließlich Folgen reeller Zahlen.

Beispiele.

(a) (a_n) mit $a_n = n^2$ liefert $(1, 4, 9, 16, \ldots)$

(b) (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ liefert $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$

(c) (a_n) mit $a_n = \frac{4n^3+2n+1}{3n^3+6}$ liefert $(\frac{7}{9}, \frac{37}{30}, \frac{115}{87}, \ldots)$

Bemerkungen.

(i) Folgen können auf beliebigen Mengen X durch $f : \mathbb{N} \to X$ definiert werden. Man schreibt dann etwa (x_n) .

(ii) Man beachte den Unterschied zwischen einer Folge und der Menge der Folgenglieder. Die Folge $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist $-1, 1, -1, 1, \ldots$, während die Menge der Folgenglieder nur aus den zwei Elementen $\{-1, 1\}$ besteht.

(iii) Häufig hat man es auch mit Folgen der Form $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ zu tun. Diese können etwa durch "Umindizierung" mittels $b_1 = a_m$, $b_2 = a_{m+1}$, ... auf die Standardform gebracht werden.

Definition. Eine reelle Folge (a_n) heißt

(i) **nach oben** (bzw. **nach unten**) **beschränkt**, wenn es eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq M$ (bzw. $M \leq a_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$.

M heißt dabei **obere Schranke** (bzw. **untere Schranke**) von (a_n) .

(ii) **beschränkt**, wenn (a_n) sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist, i.e. es existiert eine Schranke $M \in \mathbb{R}$ sodass $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz. Seien (a_n) und (b_n) beschränkte Folgen. Dann sind auch die Folgen $(a_n + b_n)$ und $(a_n b_n)$ beschränkt.

Beweis. Gelte $|a_n| \leq M_1$, $|b_n| \leq M_2 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq M_1 + M_2 \quad , \quad |a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq M_1 M_2$. $\square$

Es folgt nun die fundamentale Definition der Konvergenz einer Folge.

Definition. Eine Folge (a_n) heißt **konvergent zum Grenzwert** $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine zugehörige Zahl N_ε gibt, sodass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für jedes } n \geq N_\varepsilon \ .$$

Schreibweisen : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \quad$ oder $\quad a_n \to a$.

Bemerkungen.

(i) Eine nichtkonvergente Folge heißt **divergent**.

(ii) Eine sinnvolle Sprechweise in diesem Zusammenhang ist "fast alle", d.h. "alle, bis auf endlich viele".

$a_n \to a$ heißt damit, dass für **jedes** $\varepsilon > 0$ fast alle Folgenglieder innerhalb des Intervalls $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ liegen.

(iii) Eine Folge (a_n) mit $a_n \to 0$ heißt **Nullfolge**. Folglich bedeutet $a_n \to a$, dass die Folge $(a_n - a)$ eine Nullfolge ist.

(iv) Ausschlaggebend bei der Definition der Konvergenz einer Folge ist lediglich das Vorhandensein eines Abstandsbegriffes bzw. einer Metrik. Im Falle von $\mathbb{R}$ ist dies $d(a,b) = |a - b|$. Bei den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ gibt es auch eine Metrik $d(z,w) = |z - w|$, also können auch dort konvergente Folgen erklärt werden.

In beliebigen metrischen Räumen (X, d) wird die Konvergenz einer Folge (x_n) gegen $x \in X$ durch $d(x, x_n) \to 0$ erklärt.

D.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ liegen fast alle Folgenglieder in der offenen ε-Kugel $K(x, \varepsilon)$.

Satz.

1) Eine Folge (a_n) hat, wenn überhaupt, höchstens einen Grenzwert.

2) Eine konvergente Folge (a_n) ist beschränkt.

Beweis. zu 1) : Annahme : $a_n \to a$, $a_n \to b$ und $a \neq b$, d.h. $2\varepsilon := |a - b| > 0$. Dann existieren N_1, N_2 sodass $|a - a_n| < \varepsilon$ für $n \geq N_1$ und $|b - a_n| < \varepsilon$ für $n \geq N_2$.

Für $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ gilt dann $2\varepsilon = |a - b| = |(a - a_n) - (b - a_n)| \leq$

$\leq |a - a_n| + |b - a_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, ein Widerspruch !

zu 2) Gelte $a_n \to a$. Zu $\varepsilon = 1$ existiert ein N_ε sodass $|a - a_n| < 1$ für $n \geq N_\varepsilon$.

Dann gilt $|a_n| = |a - (a - a_n)| \leq |a| + |a - a_n| \leq |a| + 1$ für $n \geq N_\varepsilon$.

Die verbleibenden **endlich vielen** Folgenglieder können durch eine Schranke M abgeschätzt werden.

Damit gilt $|a_n| \leq \max\{|a| + 1, M\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Elementare Beispiele.

(i) $a_n = a \ldots$ const. $\Rightarrow$ $a_n \to a$

(ii) $a_n = \frac{c}{n}$, $c \in \mathbb{R}$ fest $\Rightarrow$ $a_n \to 0$

(Zu $\varepsilon > 0$ setze $N_\varepsilon = \frac{|c|}{\varepsilon} + 1$. Ist $n \geq N_\varepsilon$, dann $n > \frac{|c|}{\varepsilon}$ bzw.

$|a_n| = \frac{|c|}{n} < \varepsilon$)

(iii) $a_n = \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $a_n \to 0$.

(iv) $a_n = \frac{1}{\sqrt[p]{n}}$, $p \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; a_n \to 0$.

Satz. (Einschließungskriterium)

Für Folgen (a_n) , (b_n) , (c_n) gelte $a_n \leq b_n \leq c_n$ sowie $a_n \to a$ und $c_n \to a$.

Dann ist (b_n) konvergent mit $b_n \to a$.

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein N_ε mit $a - a_n \leq |a - a_n| < \varepsilon$ und $c_n - a \leq |c_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N_\varepsilon$.

Folglich $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$, damit $-\varepsilon < b_n - a < \varepsilon$ und damit $|b_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N_\varepsilon$. $\square$

Satz. Seien (a_n) , (b_n) konvergente Folgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$.

Dann gilt :

1) $(a_n + b_n) \to a + b$, $(a_n - b_n) \to a - b$

2) $a_n b_n \to ab$

3) Ist $b \neq 0$ (und damit $b_n \neq 0$ für fast alle n), dann $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

4) Gilt $c \leq a_n \leq d$ für fast alle n und $a_n \to a$, dann ist $c \leq a \leq d$.

Beweis. zu 3) : Wegen 2) genügt es, die Folge $(\frac{1}{b_n})$ zu betrachten.

Wegen der Ungleichung $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$ gilt auch $|b_n| \to |b|$, und damit gibt es ein N sodass $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ für $n > N$.

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein N_ε mit $|b_n - b| < \varepsilon \frac{|b|^2}{2}$ für $n > N_\varepsilon$.

Dann gilt für $n > \max\{N, N_\varepsilon\}$, dass

$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} < \frac{2|b_n - b|}{|b|^2} < \varepsilon$. $\square$

Folgerungen.

$(1 + \frac{1}{n}) \to 1$, $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0$, $\frac{2n^2+3n}{n^2+1} = \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \to 2$ etc.

Weitere Beispiele.

1) $a_n = q^n$ (**Geometrische Folge**)

Für $q = 0$ gilt $a_n \to 0$, für $q = 1$ gilt $a_n \to 1$, für $q = -1$ ist die Folge nicht konvergent.

Sei nun $|q| < 1$. Setze $y = \frac{1}{|q|}$. Dann ist $y > 1$ und kann in der Form $y = 1 + x$ mit festem $x > 0$ geschrieben werden.

Mit der Bernoulli Ungleichung folgt $y^n = (1+x)^n \geq 1 + nx \geq nx$ und damit $0 \leq |q^n| \leq \frac{1}{x}\frac{1}{n} \to 0$, also $q^n \to 0$.

Man überlege sich weiters, dass für $|q| > 1$ die Folge (a_n) unbeschränkt ist und damit nicht konvergent sein kann.

2) $a_n = \sqrt[n]{n}$

Setze $b_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Dann ist $b_n \geq 0$ und $n = (1 + b_n)^n$. Mit dem binomischen Lehrsatz ist dann $n = 1 + \binom{n}{1} b_n + \binom{n}{2} b_n^2 + \ldots > 1 + \binom{n}{2} b_n^2$ und weiters

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} b_n^2 \quad \text{bwz.} \quad b_n^2 \leq \frac{2}{n} \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq b_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} .$$

Folglich gilt $b_n \to 0$ und damit $a_n \to 1$.

3) $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$ sowie $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$ (falls $a_n \geq 0$)

Eine wichtige (symbolische) Schreibweise.

Wir schreiben "$a_n \to +\infty$" (bzw. "$a_n \to -\infty$") , wenn für **jede** Schranke $M > 0$ gilt, dass $a_n \geq M$ für fast alle n (bzw. $a_n \leq -M$ für fast alle n) .

- $a_n = -n^2 \Rightarrow a_n \to -\infty$
- für $1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, \ldots$ gilt **nicht** dass $a_n \to +\infty$.
- Gilt $a_n \to +\infty$ (oder $a_n \to -\infty$) , dann folgt $\frac{1}{a_n} \to 0$.

Weitere wichtige Begriffe.

Definition. Eine Folge (a_n) heißt

(i) **monoton wachsend**, wenn $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ (bzw. streng monoton wachsend, wenn $a_n < a_{n+1} \quad \forall\, n$)

(ii) **monoton fallend**, wenn $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ (bzw. streng monoton wachsend, wenn $a_n > a_{n+1} \quad \forall\, n$)

So ist etwa (a_n) mit $a_n = n$ (streng) monoton wachsend, (b_n) mit $b_n = \frac{1}{n^2}$ (streng) monoton fallend.

Satz. Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte reelle Folge ist konvergent (in $\mathbb{R}$) , jede monoton fallende und nach unten beschränkte reelle Folge ist konvergent (in $\mathbb{R}$).

Beweis. Sei (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt. Setze $a = \sup\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index n_0 sodass $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a$. Weil die Folge monoton wächst, gilt $a - \varepsilon < a_n \leq a$ bzw. $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, also $a_n \to a$.

Analog ist der Fall einer monoton fallenden Folge. $\square$

Definition. Sei (n_k) eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel. Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ hat die Teilfolge $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$, welche in der Form $a_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$ geschrieben werden kann.

Man überlegt sich sofort : Gilt $a_n \to a$ dann konvergent auch jede Teilfolge von (a_n) gegen a .

Definition. $b \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** der Folge (a_n) , wenn eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) existiert mit $a_{n_k} \to b$.

Beispiel. Die Folge $a_n = (-1)^n$ besitzt zwei verschiedene Häufungspunkte, nämlich $+1, -1$.

Man kann zeigen :

(i) Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt mindestens einen Häufungspunkt. (Satz von **Bolzano-Weierstrass**)

(ii) Ist die Folge (a_n) beschränkt, dann gibt es einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt von (a_n), welche wir mit $\limsup_{n\to\infty} a_n$ (**Limes superior** von (a_n)) und mit $\liminf_{n\to\infty} a_n$ (**Limes inferior** von (a_n)) bezeichnen.

(iii) Ist die Folge (a_n) nach oben unbeschränkt, dann setzen wir

$\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$,

ist die Folge (a_n) nach unten unbeschränkt, dann setzen wir

$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Man beachte : Ist (a_n) nach oben unbeschränkt, dann existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \to +\infty$.

Definition. Eine Folge (a_n) heißt **Cauchy-Folge**, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl N_ε mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > N_\varepsilon$.

Anschaulich bedeutet dies, dass sich die Folgenglieder an einer bestimmten "Stelle" "verdichten".

Für Cauchy-Folgen (a_n) und (b_n) kann man analog wie früher zeigen, dass sie beschränkt sind und $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n b_n)$ wieder Cauchy-Folgen sind.

Ist darüberhinaus (b_n) "weg beschränkt von 0" , i.e. es gibt ein $\delta > 0$ mit $|b_n| \geq \delta \;\; \forall\, n$, dann ist auch $(\frac{1}{b_n})$ eine Cauchy-Folge.

Satz. 1) Jede konvergente Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge.

2) Hat eine Cauchy-Folge (a_n) eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) mit Grenzwert a , dann gilt $a_n \to a$.

Beweis. zu 1) Sei $a_n \to a$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N_\varepsilon$. Somit $|a_n - a_m| = |(a - a_m) - (a - a_n)| \leq$

$|a - a_m| + |a - a_n| < \varepsilon$ für $n, m \geq N_\varepsilon$.

zu 2) Sei $a_{n_k} \to a$ und $\varepsilon > 0$. Für ein geeignetes N_ε ist dann $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N_\varepsilon$ und $|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n, n_k \geq N_\varepsilon$.

Folglich $|a_n - a| = |(a_n - a_{n_k}) - (a_{n_k} - a)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für $n \geq N_\varepsilon$. $\square$

Nun stellt sich heraus, dass es im Körper $\mathbb{Q}$ Cauchy-Folgen gibt, die in $\mathbb{Q}$ **nicht** konvergieren. Anders gesagt : es existieren "Lücken", gegen die sich Cauchy-Folgen "verdichten" können.

Aus diesem Grund sucht man nach einer Erweiterung bzw. "Vervollständigung" von $\mathbb{Q}$, wo dieses Phänomen nicht mehr auftritt.

Definition. Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ konvergiert, i.e. einen Grenzwert in $\mathbb{K}$ besitzt.

Durch Hinzunahme von "Punkten" zu $\mathbb{Q}$ (mathematisch : Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen rationaler Zahlen) erhalten wir schließlich die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

$\mathbb{R}$ kann im nächsten Schritt mit den Operationen der Additon, Subtrakion, Multiplikation und Division versehen werden, welche eine Erweiterung der Operationen auf $\mathbb{Q}$ sind und die gewohnten Eigenschaften besitzen. Dasselbe gilt für die Erweiterung der Ordnungsstruktur und den Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$.

Schließlich kann man zeigen

Satz. $\mathbb{R}$ ist vollständig, i.e. jede reelle Cauchy-Folge konvergiert in $\mathbb{R}$.